Lineáris algebra (A, B, C) **MINTAZH** **2016. október 10–14.**

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA ÍRANDÓ!

1. **I**gazak vagy **H**amisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H $\mathbb{R}^{n+1}$–ben van n elemű generátorrendszer.

I H $\mathbb{R}^{n}$–ben minden n elemű lineárisan független rendszer bázis.

I H Van olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hogy $ABA = \mathbf{0}$, de $BAB = B \neq \mathbf{0}$.

I H Van olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hogy $\varrho(A) = \varrho(B) = \varrho(AB) = \varrho(BA) = 1$.

I H $\mathbb{R}^{4\times 4}$-ben az invertálható mátrixoknak ugyanaz a rangja.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ L? ; $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$?

3. $n \geqq 4$; $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ B V-ben, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_4$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 12\mathbf{e}_4$. **Az elemi bázistranszformáció módszerével** döntsük el, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ L-e; $\mathbf{b}$ eleme-e $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-nak; és adjunk meg egy bázist $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-ban!

4. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert **az elemi bázistranszformáció módszerével**!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

5. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Mi lehet a $\varrho(A)$ és az A^{-1} (ha $\exists$) ?

6. Legyen $\gamma \in \mathbb{R}$ adott,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{és} \\ \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right\}, \; W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} \beta_i \in \mathbb{R} \\ \beta_1 = \gamma\beta_3 + \gamma\beta_4 \end{array} \right\}.$$

a) W_1 illetve W_2 altere-e $\mathbb{R}^4$-nek?
b) Ha valamelyik altér, abban keresendő B.
c) Ha mindkettő altér, akkor $\mathrm{Span}(W_1, W_2) =$?

7. $n \geq 3$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ B $\mathbb{R}^n$-ben;
$C = \{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4, ..., \mathbf{a}_{n-2} + \mathbf{a}_n\}$.
α) C mikor B $\mathbb{R}^n$-ben? $\quad\beta$) $\dim \mathrm{Span}(C) =$?

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: -10–10 pont.