

1. Határozza meg  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  determinánsát, ha  ${}_j[A]_k$  a következő alakú ( $a_j, b_k \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (-1)^{j+k} k^2/j \\ \text{c)} & a_j + b_k \\ \text{e)} & j + k - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{b)} & (-1)^k \sqrt{j} k^3 \\ \text{d)} & 1 + a_j b_k \\ \text{f}^*) & (j + k - 1)^2 \end{array}$$

2. Legyen  $U$  olyan 99–szer 99–es mátrix, amelyre  $U^\top = -U$ . Mennyi a  $\det(U)$ ?

3. Adjunk képletet  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$  kiszámítására (ha  $\exists$ )!

4. Számítsa ki a következő mátrixok sajátértékeit, karakterisztikus polinomját, sajátvektorait, és adja meg a sajátalttereket:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki a következő mátrixok sajátértékeit, karakterisztikus polinomját, sajátvektorait, és adja meg a sajátalttereket:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

A felsorolt mátrixok diagonalizálhatók-e  $\mathbb{R}$  felett ill.  $\mathbb{C}$  felett?

6. Az alábbi mátrixok között vannak-e  $\mathbb{R}$  felett hasonlók?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

7. Keressünk olyan mátrixokat, amelyek karakterisztikus polinomja

$$\begin{array}{l} \text{a)} \lambda^2 - 3\lambda + 7; \\ \text{b)} -\lambda^3 + \lambda; \\ \text{c)} \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1. \end{array}$$

8. Mi a kapcsolat  $M$  és  $M^{-1}$  sajátvektorai, ill. sajátértékei között?

9. Mit állíthatunk a  $T$  mátrix valós sajátértékeiről, ha

$$\text{a)} T^4 = \mathbf{0}; \quad \text{b)} T^5 = I_n; \quad \text{c)} T^6 = I_n ?$$

10. Tegyük föl, hogy az  $A$  diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja  $(3 - \lambda)^n$ . Mi lehet az  $A$  mátrix?

11. Keresendő olyan  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , melyre  $\varrho(A^\top A) \neq \varrho(A)$ . Egy ilyen példában mi lehet  $|A|$ ?

$$12. \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{array} \right|_{n \times n} = ?, \quad \left| \begin{array}{cccc} 2/x & 1/x^2 & & \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2/x & 1/x^2 \\ & & & 1 & 2/x \end{array} \right|_{n \times n} = ?$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{array} \right|_{n \times n} = ?, \quad \left| \begin{array}{cccc} \alpha + \beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha + \beta \end{array} \right|_{n \times n} = ?$$

13\*.

$$\left| \begin{array}{cccc} \cos \varphi & 1 & & \\ 1 & 2 \cos \varphi & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 \cos \varphi & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \varphi \end{array} \right|_{n \times n} = ?,$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 \cos \varphi & 1 & & \\ 1 & 2 \cos \varphi & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 \cos \varphi & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \varphi \end{array} \right|_{n \times n} = ?$$

14.  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$  esetén legyen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}^* \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

A 8. gyakorlat 10. feladatának mintájára vizsgáljuk meg  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  műveleti tulajdonságait, kapcsolatát a  $\mathbb{C}^n$ -beli összeadással és skalárral való szorzással.

15\*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $A$  mátrixra igaz, hogy  $\varrho(A^*A) = \varrho(A)$ .