Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -36 \\ -2 & 1 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Végezze el a kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak:
AB, $A + C$, $2A + B^\top$, BA, CA, AC, $C^2(= CC)$, $AA^\top$, $CC^\top$.

2. Számítsa ki a következő mátrixhatványokat (az α valós szám, az n pozitív egész):

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}^2$ b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^2$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n$ e) $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^n$

3. Igazak-e minden $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra ($n \geqq 2$) az alábbi egyenlőségek?

a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; b) $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n^2$;

c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; d) $(AB)^\top = A^\top B^\top$.

4. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját, azaz oszlopvektorrendszerük rangját:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad AA^\top \qquad A^\top A \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

5. Egy A mátrixot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $A^\top = A$.

a) Az első feladat megoldásában kapott mátrixok közül melyek szimmetrikusak?
b) Bizonyítsa be, hogy $AA^\top$ mindig szimmetrikus mátrix.
c) Igazolja, hogy az $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
d) Hány dimenziós ez az altér?

6. Bizonyítandó, hogy $r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \leqq r(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) + r(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$. Milyen következtetés adódik ebből mátrixok rangjára vonatkozóan?

7. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi $n \times n$-es mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

8*. Mutassa meg, hogy bármely 2×2-es A mátrixra az I_2, A, A^2 mátrixok lineárisan összefüggők.

9. Mennyi az összes olyan $k \times n$-es mátrix összege, amelyekben csak 0 és 1 fordul elő?