Lineáris algebra (A, B, C) 11. gyakorlat 2016. november 28 – december 2.

Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. Az alábbi leképezések közül válassza ki a lineáris leképezéseket, a lineáris transzformációkat és a vektortér–izomorfizmusokat, határozza meg mindezek magterét és képterét, valamint ezeknek az altereknek a dimenzióját!

$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \ \varphi_1\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\right) = \alpha_1 + \alpha_2$ $\qquad$ $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \ \varphi_2\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$

$\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \ \varphi_3\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\varphi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \ \varphi_4\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right) = \alpha\beta$

$\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ \ \varphi_5\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\varphi_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \ \varphi_6\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}|\alpha|\\ 0\end{bmatrix}$

2. Mik azok a geometriai transzformációk, amelyeknek mátrixa az **i**, **j**, **k** bázisban az alábbi:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az **i**, **j** bázisra vonatkozó mátrixát a sík alábbi lineáris transzformációinak:
a) 60°–os forgatás; b) az x tengelyre való tükrözés;
c) 270°–os forgatás; d) az $x = y$ tengelyre való tükrözés.

4. Legyen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ bázis $\mathbb{R}^2$–ben, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $[\varphi]^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}$. Írja fel a $[\varphi]^{\mathbf{e}'}$ mátrixot, ha $\mathbf{e}'_1 = -3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$. (Bázis lesz–e valóban $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$?)

5. Az előző feladatokból válassza ki a **lineáris transzformációkat**, majd határozza meg ezek **sajátértékeit, sajátvektorait,** és döntse el, hogy van-e hozzájuk **SB**!

6. Legyen ξ_1 a síknak az x tengelyre, η_1 pedig az y tengelyre való tükrözése, továbbá ξ_2, illetve η_2 ugyanezekre a tengelyekre való merőleges vetítések. Számítsa ki a $\xi_1 + \eta_1$ és a $\xi_2 + \eta_2$ összegeket!

7. Írja fel a mátrixát az **i**, **j**, **k** bázisban az x tengely és az y tengely körüli 90°–os forgatásnak. Mi a két transzformáció szorzata? (Számítsa ki a két mátrix szorzatát!)

8. Az alábbi mátrixok egy–egy lineáris transzformáció mátrixai az **i**, **j**, **k** bázisban. Adja meg ugyanezeknek a lineáris transzformációknak a mátrixát az **i**, **i**+**j**, **i**+**j**+**k** bázisban!

$$A = \begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$