Lineáris algebra röpzh

2016. október 4.

A csoport

Feladat. Legyenek adottak a következő vektorok:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Előállítható-e $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként? (Ha igen, adj meg egy ezt igazoló lineáris kombinációt; ha nem, bizonyítsd be.) (3 + 3 pont)

Megoldás. Tekintsük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok egy lineáris kombinációját: ez

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \alpha - \delta \\ \beta - \alpha \\ \gamma - \beta \\ \delta - \gamma \end{bmatrix}$$

alakú, ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Az, hogy $\mathbf{u}$ előáll ilyen alakban, azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \alpha - \delta &= 1 && (1) \\ \beta - \alpha &= 1 && (2) \\ \gamma - \beta &= 1 && (3) \\ \delta - \gamma &= -3; && (4) \end{aligned}$$

ebből kifejezve $\alpha = 1 + \delta$, $\beta = 2 + \delta$, $\gamma = 3 + \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát egy megoldást ad például $\delta = 0$-ra $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

Vegyük észre, hogy egyszerűbben is eljárhattunk volna. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, tehát a vektorok közül bármelyiket elhagyhattuk volna, és akkor eggyel kevesebb ismeretlenünk lett volna.

Szintén észrevehető, hogy mind a négy vektorban a koordináták összege nulla. Emiatt minden skalárszorosukban és ezért minden lineáris kombinációjukban is így van, tehát $\mathbf{v}$ nem áll elő lineáris kombinációként. (Persze $\mathbf{v}$-re is felírhattuk volna a megfelelő egyenletrendszert ugyanúgy, mint $\mathbf{u}$-nál, ezt viszont nem tudtuk volna megoldani: az derült volna ki, hogy a rendszerben ellentmondás van az egyenletek között, mert a bal oldalak összege nulla, a jobb oldalaké pedig nem.)

B csoport

Feladat. Legyenek adottak a következő vektorok:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Előállítható-e $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként? (Ha igen, adj meg egy ezt igazoló lineáris kombinációt; ha nem, bizonyítsd be.) (3 + 3 pont)

Megoldás. Ugyanúgy járunk el, mint a másik csoport feladatának megoldásánál; a négy adott vektor is ugyanaz. $\mathbf{u} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, tehát $\mathbf{u}$ előáll; $\mathbf{v}$ nem állítható elő, mert koordinátáinak összege nem nulla.