Lineáris algebra röpzh

2016. szeptember 27.

A csoport

1. feladat. Legyenek adottak a következő vektorok:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lineárisan összefüggő-e az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ rendszer, illetve a $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ rendszer? (Ha Ö, adj meg egy nemtriviális lineáris kombinációt, ami ezt igazolja; ha L, akkor írd le a bizonyítást.)

(2 + 2 pont)

Megoldás. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ rendszer lineárisan összefüggő (Ö). Ezt igazolja a következő nemtriviális lineáris kombináció:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1-0 \\ 2-1-1 \\ 4-2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Azt, hogy általános esetben hogy lehet egy lineáris összefüggőséget igazoló lineáris kombinációt találni, a másik rendszer kapcsán nézzük meg.

Tekintsük tehát a $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ rendszert. Vegyünk egy $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}$ lineáris kombinációt, ahol $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ez a lineáris kombináció nullvektort ad. Ennek alapján feltételeket tudunk felírni az együtthatókra (β, γ, δ), és ennek eredményeként vagy az fog kijönni, hogy ezek nullák kell legyenek (azaz a rendszer lineárisan független), vagy fogunk tudni mutatni olyan konkrét értékeket, amik nem mind nullák, a lineáris kombináció mégis nullvektort ad.

$$\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta + \gamma \\ 2\beta + 2\gamma + 3\delta \end{bmatrix}$$

Az, hogy ez nullvektor, pontosan azt jelenti, hogy minden komponens nulla:

$$\beta = 0 \tag{1}$$
$$\beta + \gamma = 0 \tag{2}$$
$$2\beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \tag{3}$$

Az első egyenlet rögtön megadja, hogy $\beta = 0$. Ezt a második egyenletbe beírva $\gamma = 0$ adódik. Ezek alapján pedig a harmadik egyenletből $3\delta = 0$, azaz $\delta = 0$. Tehát $\beta = \gamma = \delta = 0$, azaz csak a csupa nulla együtthatós (ún. triviális) lineáris kombináció ad nullvektort. Tehát a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ rendszer lineárisan független.

2. feladat. Igaz-e a következő állítás? Ha $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$, akkor $\lambda = \mu$. (Ha igaz, akkor írd le a bizonyítást, ha nem, akkor adj ellenpéldát.) (2 pont)

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz. $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$-ból akarunk arra következtetni, hogy $\lambda = \mu$. Nem csinálhatjuk viszont azt, amit valós számoknál megszoktunk: nem oszthatjuk mindkét oldalt $\mathbf{a}$-val, mert az vektor, és vektorokra nem definiáltuk az osztást.

Ehelyett visszavezetjük a vektoregyenletet valós számokból álló egyenletekre. Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha komponensenként egyenlők. Jelölje $\mathbf{a}$ komponenseit rendre a_1, a_2, a_3.

$$\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} \iff \begin{bmatrix}\lambda a_1\\ \lambda a_2\\ \lambda a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu a_1\\ \mu a_2\\ \mu a_3\end{bmatrix} \iff \begin{array}{rcl}\lambda a_1 &=& \mu a_1\\ \lambda a_2 &=& \mu a_2\\ \lambda a_3 &=& \mu a_3\end{array}$$

Vegyük az első egyenletet:

$$\lambda a_1 = \mu a_1;$$

mivel $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $a_1 \neq 0$, ezért lehet vele osztani. Tehát $\lambda = \mu$.

B csoport

1. feladat. Legyenek adottak a következő vektorok:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}.$$

Lineárisan összefüggő-e az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ rendszer, illetve az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ rendszer? (Ha Ö, adj meg egy nemtriviális lineáris kombinációt, ami ezt igazolja; ha L, akkor írd le a bizonyítást.)

(2 + 2 pont)

Megoldás. Nézzük először az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ rendszert. Gyakorlaton megbeszéltük, hogy két vektorból álló rendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha valamelyik vektor a másiknak skalárszorosa (valós számszorosa). Ez itt jól láthatóan nem áll fenn, tehát a rendszer lineárisan független (L).

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ rendszernek részrendszere az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ rendszer, ami lineárisan összefüggő, ennek bizonyítása a másik csoport 1. feladatának megoldásában olvasható. Ott azt is megmutattuk, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ez az egyenlet persze úgy is írható, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} + 0\mathbf{d} = \mathbf{0}$, ezért az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ rendszer lineárisan összefüggő (Ö).

Ha ezt nem vesszük azonnal észre, a feladatot akkor is meg tudjuk oldani: felírhatjuk a vektorokra vonatkozó egyenletrendszert, amit megoldva azt kapjuk, hogy $\alpha = -\beta = -\gamma$ és $\delta = 0$. Ebből könnyen megadható a fenti nemtriviális lineáris kombináció, ami nullvektort ad.

2. feladat. Igaz-e a következő állítás? Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \neq 0$ és $\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. (Ha igaz, akkor írd le a bizonyítást; ha nem, akkor adj ellenpéldát.) (2 pont)

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz. Egyrészt követhetjük a másik csoport 2. feladatánál alkalmazott gondolatmenetet, és felírhatjuk a komponensekre vonatkozó egyenleteket: ha $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ komponensei rendre a_1, a_2, a_3, illetve b_1, b_2, b_3, akkor

$$\lambda a_1 = \lambda b_1$$
$$\lambda a_2 = \lambda b_2$$
$$\lambda a_3 = \lambda b_3.$$

$\lambda \neq 0$, így minden egyenletben oszthatunk vele, és így kapjuk, hogy

$$a_1 = b_1$$
$$a_2 = b_2$$
$$a_3 = b_3,$$

ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.