# Lineáris algebra zh

2016. december 6.

## Megoldások

**1. feladat.** Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz $-2$ pontot ér; a válasz hiánya 0 pont. A választ ne a feladatsorra írd, azt nem szedem be.)

*a)* Ha egy $n \times n$-es determináns minden sorában és minden oszlopában pontosan $(n-1)$ darab nulla van, akkor az értéke nem nulla.

*b)* Ha egy (ugyanannyi egyenletből és ismeretlenből álló) lineáris egyenletrendszer determinánsa nulla, akkor nincs megoldása.

*c)* Ha $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, és $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ sajátvektorai $\mathcal{A}$-nak, akkor $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ is sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.

*d)* Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, akkor $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

*e)* Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, és $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, ahol $\lambda \neq \mu$ valós számok, akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek.

*Megoldás.* Igaz (definícióból látszik), hamis (lehet végtelen sok megoldása), hamis (az is kellene, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ ugyanahhoz a sajátértékhez tartozzanak), igaz (a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire, vagy másképp: a vegyesszorzat determinánsalakjában van két azonos sor), igaz.

**2. feladat.** Legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}$. Számítsd ki a következőket: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$, $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$!

*Megoldás.* Kiszámoljuk $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-t, mert kelleni fog *c*)-hez is: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [2,\ 5,\ -4]^\top$, innen $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = 14$. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 14$ a vegyesszorzat tulajdonságai miatt. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = [13,\ -18,\ -16]^\top$.

**3. feladat.** Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Számítsd ki a következő determinánsokat!

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (4 pont)

*b)* $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$ (6 pont)

*Megoldás.* *a*)-ban az eredmény 144, például elemi bázistranszformációval kapható meg. *b*)-ben vonjuk ki az első sort a másik háromból:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (b-a)(a+b) & (b-a)(a+b+2) & (b-a)(a+b+4) & (b-a)(a+b+6) \\ (c-a)(a+c) & (c-a)(a+c+2) & (c-a)(a+c+4) & (c-a)(a+c+6) \\ (d-a)(a+d) & (d-a)(a+d+2) & (d-a)(a+d+4) & (b-a)(a+d+6) \end{vmatrix}$$

Kiemelhető $(b-a)(c-a)(d-a)$, a megmaradó determinánsban vonjuk ki a második sort a harmadikból és a negyedikből. Lesz két lineárisan összefüggő sor. Az eredmény $(b-a)(c-a)(d-a) \cdot 0 = 0$.

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ a+b & a+b+2 & a+b+4 & a+b+6 \\ a+c & a+c+2 & a+c+4 & a+c+6 \\ a+d & a+d+2 & a+d+4 & a+d+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ a+b & a+b+2 & a+b+4 & a+b+6 \\ c-b & c-b & c-b & c-b \\ d-b & d-b & d-b & d-b \end{vmatrix} = 0$$

**4. feladat.** Számítsd ki azt az $n \times n$-es determinánst, aminek az első sor, az $n$-edik oszlop és a közvetlenül a főátló alatt lévő elemei 1-esek, a többi eleme pedig 0!

*Megoldás.* Vonjuk ki az első sort a másodikból. Ezután adjuk hozzá a második sort a harmadikhoz, majd a harmadikat a negyedikhez, s így tovább.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \cdot (n-2)$$

**5. feladat.** Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Írd fel $A$ karakterisztikus polinomját! Számítsd ki $A$ sajátértékeit! Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! Add meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátaltereket! Állapítsd meg, hogy $A$ diagonalizálható-e (a gondolatmenetet is írd le); ha igen, írj fel egy olyan diagonálmátrixot, amihez hasonló!

*Megoldás.* $k_A = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)$, a sajátértékek 1, $-1$ és 0. A sajátvektorok rendre $[x,\, 0,\, x]^\top$, $[x,\, -x,\, -x]^\top$, $[0,\, 0,\, z]^\top$, a sajátaltereket $\mathbf{0}$ hozzávételével kapjuk. Mivel a sajátalterek dimenzióinak összege 3, van SB, így $A$ diagonalizálható; a diagonális alakokban a főátlóban a sajátértékek állnak.

**6. feladat.** Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, és tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben a szokásos skaláris szorzatot ($\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$). Add meg $A$ egy ortonormált sajátbázisát (SONB)! Határozd meg az $A$-hoz tartozó kvadratikus alak jellegét!

*Megoldás.* $A$ sajátértékei 3 és 1, a megfelelő sajátalterek rendre $[x,\, x]^\top$ és $[x,\, -x]^\top$ alakú vektorokból állnak. Ezekből kiválasztható ortogonális bázis például $\left\{[1,\, 1]^\top, [1,\, -1]^\top\right\}$ (vagy a spektráltételre hivatkozva, vagy külön ellenőrizve, hogy ezek sajátbázist alkotnak és ortogonálisak), normálás után SONB-t kapunk: $\left\{[1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}]^\top, [1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2}]^\top\right\}$.

Mindkét sajátérték pozitív, ezért az $A$-hoz tartozó kvadratikus alak pozitív definit. (Vagy: a karakterisztikus sorozata $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, amiben minden tag pozitív.)

**7. feladat.** Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ -x-z \\ y+z \end{bmatrix}$. Igazold, hogy $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció! Válassz a kiindulási és az érkezési térben is egy-egy bázist, és add meg $\mathcal{A}$ egy mátrixát ebben a bázispárban! Számítsd ki $\mathcal{A}$ sajátértékeit! Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! Döntsd el, hogy $\mathcal{A}$-nak van-e sajátbázisa; ha igen, adj is meg egyet!

*Megoldás.* A linearitás ellenőrzése a definíció alapján történhet; a kiindulási és az érkezési tér dimenziója megegyezik, így $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció. Vegyük a standard bázist mindkét esetben, ebben $\mathcal{A}$ mátrixa: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ennek a sajátértékei $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$, a sajátvektorok rendre $[x,\, 0,\, -x]^\top$ és $[x,\, x,\, -x]^\top$, ennek alapján mindkét sajátaltér dimenziója 1, így nincsen SB.