Lineáris algebra zh

2016. december 6.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet (neptunkód nem kell).

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek, és tetszőleges sorrendben kidolgozhatók. Valamennyi feladat 10 pontot ér, részpontszám is kapható. Az 1. feladat kivételével végeredmény önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Törekedj a világos leírásra (csak arra adok pontot, ami le van írva és el tudom olvasni). Nem kell minden feladat megoldását külön lapra írni. Íróeszközökön kívül semmilyen segédeszköz nem használható.

A zh a félévi jegy 40%-át teszi ki. Ponthatárok: 5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: -10–10 pont. Az elégséges gyakorlati jegyhez mindkét zh-n legalább 16 pontot el kell érni.

Jó munkát!

1. feladat. Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz -2 pontot ér; a válasz hiánya 0 pont. A választ ne a feladatsorra írd, azt nem szedem be.)

a) Ha egy $n \times n$-es determináns minden sorában és minden oszlopában pontosan $(n-1)$ darab nulla van, akkor az értéke nem nulla.

b) Ha egy (ugyanannyi egyenletből és ismeretlenből álló) lineáris egyenletrendszer determinánsa nulla, akkor nincs megoldása.

c) Ha $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, és $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ sajátvektorai $\mathcal{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ is sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.

d) Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, akkor $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

e) Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, és $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, ahol $\lambda \neq \mu$ valós számok, akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek.

2. feladat. Legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}$. Számítsd ki a következőket:

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ (3 pont)

b) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (3 pont)

c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (4 pont)

3. feladat. Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Számítsd ki a következő determinánsokat!

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ (4 pont)

b) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$ (6 pont)

4. feladat. Számítsd ki azt az $n \times n$-es determinánst, aminek az első sor, az n-edik oszlop és a közvetlenül a főátló alatt lévő elemei 1-esek, a többi eleme pedig 0!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (10 pont)

5. feladat. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Írd fel A karakterisztikus polinomját! (2 pont)

b) Számítsd ki A sajátértékeit! (2 pont)

c) Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (2 pont)

d) Add meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátaltereket! (2 pont)

e) Állapítsd meg, hogy A diagonalizálható-e (a gondolatmenetet is írd le); ha igen, írj fel egy olyan diagonálmátrixot, amihez hasonló! (2 pont)

6. feladat. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, és tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben a szokásos skaláris szorzatot (azaz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$).

a) Add meg A egy ortonormált sajátbázisát (SONB)! (7 pont)

b) Határozd meg az A-hoz tartozó kvadratikus alak jellegét! (3 pont)

7. feladat. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ -x - z \\ y + z \end{bmatrix}$.

a) Igazold, hogy $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció! (2 pont)

b) Válassz a kiindulási és az érkezési térben is egy-egy bázist, és add meg $\mathcal{A}$ egy mátrixát ebben a bázispárban! (2 pont)

c) Számítsd ki $\mathcal{A}$ sajátértékeit! (2 pont)

d) Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (2 pont)

e) Döntsd el, hogy $\mathcal{A}$-nak van-e sajátbázisa; ha igen, adj is meg egyet! (2 pont)