Geometria 3 kidolgozott vizsgatematika

2016. május 19.

1. **Támaszfüggvény:** legyen K kompakt konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor K támaszfüggvénye
$$h_K(u) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ h_K(u) = \max_{x \in K} u \cdot x.$$

2. **Cauchy-féle integrálformula:** legyen K konvex test $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor
$$S(K) = \frac{1}{\kappa_{d-1}} \cdot \int_{S^{d-1}} V_{d-1}\left(K|u^\perp\right) \mathrm{d}u.$$

3. **Izoperimetrikus egyenlőtlenség:** legyen K konvex test $\mathbb{R}^d$-ben, és legyen $r > 0$ olyan, hogy $V(K) = V\left(rB^d\right)$. Ekkor $S(K) \geq S\left(rB^d\right)$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K gömb.

4. **Steiner-formula:** legyen K kompakt konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, és legyen $r \geq 0$. Ekkor
$$V\left(K + rB^d\right) = \sum_{i=0}^{d} \kappa_{d-i} V_i(P) r^{d-i},$$
ahol $V_i(P)$ a belső térfogat. (A belső térfogat $\dim K < i$-re 0, $\dim K \geq i$-re az i dimenziós Lebesgue-mérték.)

5. **Laphoz tartozó külső szög:** legyen P d dimenziós politóp, legyen $\mathcal{F}_i(P)$ a P i dimenziós lapjainak halmaza. Az $F \in \mathcal{F}_i(P)$-hez tartozó normális kúp
$$N_P(F) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : y \cdot (z - x) \leq 0\ \forall z \in P\, \forall x \in F \right\},$$
és az F laphoz tartozó külső szög $\gamma\left(N_P(F)\right)$.

   Politóp belső térfogata:
$$V_i(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} V_i(F) \gamma\left(N_P(F)\right)$$

6. **Súlypont:** legyen K konvex test $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor K súlypontja
$$s(K) = \frac{1}{V(K)} \int_K x \, \mathrm{d}x.$$

7. **Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség:** legyenek K, M konvex testek $\mathbb{R}^d$-ben. Legyen $\alpha, \beta \geq 0$. Ekkor
$$V(\alpha K + \beta M)^{1/d} \geq \alpha V(K)^{1/d} + \beta V(M)^{1/d},$$
és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $K = \lambda M + x$ valamely $\lambda > 0$-ra és $x \in \mathbb{R}^d$-re, azaz K és M homotetikusak.

8. **Minkowski-egyenlőtlenség:** legyenek K, C konvex testek $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor
$$V(K, \dots, K, C)^d \geq V(K)^{d-1} V(C),$$
és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha K és C homotetikusak.

9. **Hiperbolikus háromszög területe:** ha egy $\mathbb{H}^2$-beli háromszög szögei α, β, γ, akkor a területe $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

10. **A hiperbolikus tér hiperboloidmodellje:** legyen $d \geq 2$. Ekkor $\mathbb{R}^{d+1} = \left\{(t, z) : t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d\right\}$. Ha $x = (t_0, t_1, \dots, t_d)$ és $y = (s_0, s_1, \dots, s_d)$, akkor legyen $\langle x, y \rangle = t_0 s_0 - t_1 s_1 - \ldots - t_d s_s$.
$$\mathbb{H}^d = \left\{x = (t, z) \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle x, x \rangle = 1, t > 0\right\} = \left\{\left(1 + \|z\|^2, z\right) : z \in \mathbb{R}^d\right\}$$
Két pont távolsága: $x, y \in \mathbb{H}^d$-re egyértelműen létezik $r \geq 0$, hogy $\langle x, y \rangle = \operatorname{ch} r$. Ekkor $d_{\mathbb{H}}(x, y) = r$.