I. Vektorterek

Definíció. K test feletti V vektortér.

Legyen adott egy K test és $V \neq \emptyset$ halmaz. V vektortér K felett, ha

1) V-n értelmezett $+ : V \times V \to V$;
2) K és V között értelmezett $\cdot$ skalárral való szorzás;
3) $(V, +)$ Abel-csoport;
4) A sk. való szorzás disztributív:
   a) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
   b) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
   c) $\lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v$
   d) $1 \cdot v = v$

Példák: 1) $\mathbb{R}^n$

2) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x + y = 0\}$

3) M_n

4) $\{A \in M_n : \operatorname{Sp} A = 0\}$

5) $K[x]$, $K[x]_{\leq n}$

6) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \ f \text{ folytonos}\}$ $(X \subset \mathbb{R})$

7) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \ f \ \infty\text{-szer diffható}\}$ $(X \subset \mathbb{R})$

8) körön

Ellenpélda:

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{Q}, \ y \notin \mathbb{Q}\}$

2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x + y = 1\}$

3) $GL(n, K) = \{M \in M_n : \det M \neq 0\}$ az invertálható mátrixok (általános lineáris csoport)

4) $\{A \in M_n : \det A = 0\}$

6) $\{p \in K[x] : p(0) \geq 1\}$

Definíció. Legyen V K feletti vektortér.

$V \supset \{v_1, \dots, v_n\}$ lin. ftlenek, ha

$$\left(\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0, \quad \lambda_i \in K\right) \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$$

Különben $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. összefüggő.

Példák: 1) bármely 3 vektor $\mathbb{R}^2$-ben lin. öf.

2) $1, x, \dots, x^n \in K[x]_{\leq n}$ lin ft.

3) $M_n(K)$, $A \subset M_n$ rögz.

$I_n, A, \dots, A^k \to$ min k, hogy ezek lin. öfüggők $\to$ a minimálpolinom foka.

Definíció. $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ generátorrendszer, ha $\forall v \in V \ \exists \lambda_i \in K : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.

Példák: 1) $\mathbb{R}^2$-ben $(0,1)$ és $(1,0)$ gr.

2) $1, x, \dots, x^n$ $K[x]_{\leq n}$-ben

Definíció. $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ bázis, ha lin. ftl. generátorrendszer.

Állítás. $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ bázis, akkor a gyr.-es felírás egyértelmű.

B: Van felírás, most gyr.

$\lightning$ $\exists$ 2: $\sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i$

$\Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ Lin. ftl. $\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \Rightarrow \forall i: \lambda_i = \mu_i$ $\lightning$. $\square$

Állítás. $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ és $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ bázisok $\Rightarrow k = \ell$.
BÁZISTÉTEL

B: $\lightning$ $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, $W = \{w_1, \dots, w_\ell\}$, $k < \ell$.

V bázis $\Rightarrow \exists\, a_{ij} \in K$: $w_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{ik} v_k$ $(\forall i)$

W bázis $\Rightarrow$ ha $c_1 w_1 + \dots + c_\ell w_\ell = 0$, akkor $c_1 = \dots = c_\ell = 0$.

$\Leftrightarrow c_1 \cdot (a_{11} v_1 + \dots + a_{1k} v_k) + \dots + c_\ell (a_{\ell 1} v_1 + \dots + a_{\ell k} v_k) = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = 0$

$\Leftrightarrow v_1 \cdot (c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \dots + c_\ell a_{\ell 1}) + \dots + v_k \cdot (c_1 a_{1k} + \dots + c_\ell a_{\ell k}) = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = 0$

V lin ftl. $\Rightarrow$ a
$$\left.\begin{aligned} c_1 a_{11} + \dots + c_\ell a_{\ell 1} &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 a_{1k} + \dots + c_\ell a_{\ell k} &= 0. \end{aligned}\right\} k \text{ egyenlet}$$

Tehát ennek az egyenletrr.-nek csak $c_1 = \dots = 0$ a megoldása.

De (ez homogén, ahol) kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen $\lightning$ $\square$

Definíció. Ha $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ bázis V-ben, akkor $\dim_K V = k$. (V dimenziója K felett)

Példák: $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R} \to \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\to$ Függés K-tól!
$V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{C} \to \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Definíció. Ha $\nexists$ bázis $\to \dim V = \infty$.

Példa: $\dim_K K[x] = \infty$ $\qquad \dim_K K[x]_{\le n} = n+1$

$\dim_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}) = \infty$ $\qquad \dim_K M_n = n^2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \infty$ $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$

Definíció. $B = \{v_1, \dots, v_\ell\} \subset V$ bázis, $v = \sum \lambda_i v_i \to \lambda_1, \dots, \lambda_k$ v B-beli koordinátái

F1, F2, F3.

Definíció. Legyen V vt. K felett.
$W \subset V$ résztvektortér (altér), ha W vektortér.

Példa: $\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$

Definíció. Legyen V vt, $S \subset V$ halmaz.
$\operatorname{span}(S) \subset V$ az a legkisebb altér, ami tartalmazza S-et.
Ez az S által feszített vektortér.

F4.

Példák: 1) $\{A \in M_n, A^2 = 0\} \subset M_n$ nem altér: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq 0$

2) $\{A \in M_n : \exists P : PAP^{-1}$ diagonális$\}$ diagonalizálható mátrixok $\to$ nem altér

3) A diagonális mátrixok $\to$ altér.

4) 1)-nél és 2)-nél mi a legnagyobb altér? F5.

II. Lineáris függvények

Legyenek V_1, V_2 vektorterek K felett.

Definíció. $f: V_1 \to V_2$ lineáris fv., ha $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$

Példák:
1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$
2) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
3) $M_n \to M_n$, $X \mapsto AX$ (A rögz.)
4) $C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$
5) $C^\infty[0,1] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

Definíció. f magja: $\ker f = \{v \in V_1 : f(v) = 0\}$

f képe: $\operatorname{im} f = \{w \in V_2 : \exists v \in V_1$ hogy $f(v) = w\}$

Állítás. $\ker f$ altér. V_1-ben.

B: Lemma: $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$.

B: $f(0 + v_2) = f(0) + f(v_2)$

$f(v_2) = f(0) + f(v_2) \Rightarrow f(0) = 0$.

Mivel $f(0) = 0$, így $\operatorname{Ker} f \ni 0_{V_1}$

Ha $\underset{u,v \in \operatorname{Ker} f}{\wedge}$ $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (u+v) \in \operatorname{Ker} f$

$f(\lambda v) = \lambda f(v) = 0 \Rightarrow \lambda v \in \operatorname{Ker} f$. Tehát $\ker f$ altér. □

Állítás. $\operatorname{im} f$ altér V_2-ben.

B: $f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \operatorname{im} f$.

Ha $u, v \in \operatorname{im} f \to \exists u', v'$: $f(u') = u$, $f(v') = v$. $\Rightarrow u + v = f(u') + f(v') = f(u' + v')$, tehát $u + v \in \operatorname{im} f$.

$f(v') = v \to f(\lambda v') = \lambda v \Rightarrow \lambda v \in \operatorname{im} f$. Tehát $\operatorname{im} f$ altér. □

Tétel. (Dimenziótétel) $\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V_1$

B: Legyen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis $\operatorname{Ker} f$-ben.

$B \cup \{d_1, \dots, d_m\} \to$ a V_1 egy bázisa. A bázistétel szerint $\dim V_1 = n + m$.

Belátjuk, hogy $\operatorname{im} f = m$, sőt hogy $B' = \{f(d_1), \dots, f(d_m)\}$ bázis $\operatorname{im} f$-ben.

1) B' generátorrendszer

Ha $w \in \operatorname{im} f$: $\exists v$, hogy $f(v) = w$ ($v \in V_1$)

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$.

$\Rightarrow w = \underbrace{\lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n)}_{0} + \mu_1 f(d_1) + \dots + \mu_m f(d_m)$, tehát B' genr. ✓

2) B' független.

Tfh. $v = \mu_1 f(d_1) + \dots + \mu_m f(d_m) = 0$.

$0 \in \ker f \Rightarrow v = \mu_1 f(d_1) + \dots + \mu_m f(d_m) \in \ker f$.

$\Rightarrow$ felírható B-ben: $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_1 b_n$.

$v \in V$ és a felírás V-ben a $B \cup B'$ bázisban egyértelmű $\to \forall \mu_j = 0$. □

Lineáris függvények mátrixreprezentációja

Legyen $f: V_1 \to V_2$, K felett, lin. leképz.

V_1-ben rögzített az $E = \{e_1, \dots, e_n\}$,

V_2-ben —"— a $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ bázis.

$f(e_i) \in V_2 \Rightarrow$ felírható: $f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} b_j$ alakban.

$\Rightarrow$ az f az E bázisra vonatkozóan lényegében a λ_{ij} el.-ből áll

$\to \quad f \Rightarrow [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \le i < n \\ 1 \le j \le m}}$ Ez f-nek az E és B bázisokban lévő mátrixfelírása.

Visszafele is megcsinálható: $[\lambda_{ij}] \Rightarrow f$.

$v \in V_1, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$$\Rightarrow f(v) = f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{ij}\right) b_j$$

$$f: (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \lambda_{ij}\right)_j$$

Tehát rögzített bázisok mellett a lineáris leképezés $\Leftrightarrow [\lambda_{ij}]$.

Endomorfizmusok tere

Legyen V K feletti vektortér.

<u>Definíció</u>. $\mathrm{End}(V) = \{\underbrace{f: V \to V,\ f \text{ lineáris}}_{f \text{ endomorfizmus}}\}$

<u>Állítás</u>. $\mathrm{End}(V)$ vektortér.

B. • $0 = (V \to V,\ x \mapsto 0_V)$ lineáris $\Rightarrow 0 \in \mathrm{End}\, V$

• $f, g \in V \Rightarrow f+g$ lineáris: $(f+g)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$

$= \lambda f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$\to f+g \in \mathrm{End}\, V$

• $f \in V \Rightarrow \lambda f$ lineáris: $(\lambda f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda(\lambda f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) =$

$= \lambda \lambda_1 f(v_1) + \lambda \lambda_2 f(v_2) =$

$= \lambda_1 (\lambda f)(v_1) + \lambda_2 (\lambda f)(v_2)$. ✓ □

A fentiek szerint ha $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ bázis V-ben, továbbá $f \in \mathrm{End}(V)$, akkor f-nek van mátrixreprezentációja E-re nézve: $[\lambda_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in M_n$.

$f(e_i) \in V \longrightarrow f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$ A lineáris leképezések <u>előírhatósági tétele</u>:

egy endomorfizmust meghatároz n vektor képe.

$$\mathrm{End}(V) \underset{E}{\Longleftrightarrow} M_n$$

A felírás persze függ E-től.

Báziscsere

Legyen V vt. bázisa $E = (e_1, \dots, e_n)$, $f \Leftrightarrow [\lambda_{ij}]^E \in M_n$ endomorfizmus,

V egy bázisa $B = (b_1, \dots, b_n)$, $f \Leftrightarrow [\tau_{ij}]^B \in M_n$.

Kérdés: mi az összefüggés λ_{ij} és τ_{ij} között?

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j, \qquad f(b_i) = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} b_j$$

Legyen p_{ij} a szövetkezőnek megfelelő: $b_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} e_j \rightarrow [p_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$f(b_i) = f\left(\sum_{j=1}^n p_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^n p_{ij} f(e_j) = \sum_{j=1}^n \left(p_{ij} \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} e_k\right) = \underline{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_{jk}\right) e_k}$$

áttérés B-ről E-re

$f(e_j)$ kifejtése f szerint

Másrészt:

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \left(\sum_{k=1}^n p_{jk} e_k\right) = \underline{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tau_{ij} p_{jk}\right) e_k}$$

$f(b_i)$ kifejtése f szerint

áttérés B-ről E-re

A koordináták egyértelműek

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_{jk} = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} p_{jk} \quad \forall i, k$$

mint mátrixok

$$P \cdot \lambda^E = \tau^B \cdot P \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau^B = P \cdot \lambda^E \cdot P^{-1}}$$

Megjegyzés: ez mutatja, hogy a determináns valóban invariáns a lin. trafóra:

$\det(P \lambda P^{-1}) = \det(\lambda)$. [Ugyanez igaz a kar. polinomra is.]

Definíció. Izo $V = \{ f : V \to V,\ f$ izomorfizmus* $\} = GL(V)$

* Valójából mivel $f: V \to V$, f automorfizmus. **F6.**

Mivel f tartja az összeadást és a sk. szorzást (bizen izo.), ezért lineáris függvény.

Következmény: $GL(V) \subset End(V)$.

Rögzítsünk egy bázist! $E = (e_1, \dots, e_n)$. Ennek a bázisra nézve $End(V) \Leftrightarrow [\lambda_{ij}]^E_{ij} \in M_n$

F7.

Állítás. Legyen $f, g \in End\ V$. Kompozíciójuk: $g \circ f$. $\quad (f(e_i) = \sum \lambda_{ij} e_j,\ g(e_i) = \sum \tau_{ij} e_j)$

1) Ekkor $g \circ f$ lineáris. $\qquad V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V$

2) $[g]^E \cdot [f]^E = [g \circ f]^E$

B: 1) $(g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) = \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2)) =$

$= \lambda_1 (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 (g \circ f)(v_2)$. ✓

2) $g(f(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} g(e_j) = \sum_{j=1}^n \left(\lambda_{ij} \sum_{k=1}^n \tau_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \tau_{jk}\right) e_k$

$g(f(e_i)) = (g \circ f)(e_i) = \sum_{k=1}^n [g \circ f]^E_{ik} e_k \longrightarrow [g \circ f]^E_{ik} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \tau_{jk} =$

$= ([g]^E \cdot [f]^E)_{ik}$

Ha E rögzített:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}\ V \arrow[r, "\text{csoporthomomorfizmus}", "\sim"'] \arrow[loop below, "G(V)"] & (M_n; \cdot) \arrow[loop below] \\
G(V) \arrow[r, "\sim"'] & (GL(n,K); \cdot)
\end{tikzcd}$$

a kompozícióra — a szorzásra

Duális tér

Legyen V K feletti vektortér.

<u>Definíció.</u> $V^* = \mathrm{Hom}(V, K) = \{f : V \to K,\ f \text{ lineáris}\}$

Példák: 1) az integrál lineáris operátor:

$$\left.\begin{aligned} \int : C^\infty[0,1] &\to \mathbb{R} \\ f &\to \int_0^1 f(t)\,dt \end{aligned}\right\} \to \int \in C^\infty[0,1]^*$$

2) $f : C^\infty[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad (x \in [0,1])$

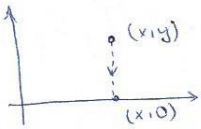
$f \to f(x)$ $\quad$ a behelyettesítés

3) $f : \underset{(a,b)}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (a,b)$ rögzített

$(x,y) \longrightarrow ax + by$ $\quad$ a skaláris szorzat

4) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow (x,0)$ $\quad$ vetítés



Ellenpélda: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow x^2$ $\quad$ nem lineáris.

<u>Tétel.</u> V^* vektortér K felett.

B: Ha $f, g \in V^* \Rightarrow f+g$ szintén lineáris (mert End V vektortér),

$f+g$ is $V \to K$.

$\Rightarrow f+g \in V^*$.

Ha $f \in V^*$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda f$ szintén lineáris (mert End V vektortér)

$\lambda f : V \to K$

$\Rightarrow \lambda f \in V^*$.

Van „0" elem V^*-ban: $f : V \to K$

$v \to 0$.

Tehát V^* vektortér.

Duális bázis

Definíció. Legyen V vektortér K fölött, $B=(b_1,\dots,b_n)$ rögzített bázis.

Legyen $b_i^* \in V^*$, $b_i^*: V \to K$, $b_i^*\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j\right) = \alpha_i$ (ez valóban lineáris leképezés).

Ekkor $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ duális bázis.

$b_i^*: (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto \alpha_i$

Tétel. B^* bázis V^*-ban.

B: 1) Függetlenség.

Tfh. $\sum_{i=1}^n r_i b_i^* = 0$

$\sum_{i=1}^n r_i b_i^*(v) = 0$

$\sum_{i=1}^n r_i \underbrace{b_i^*(0,\dots,0,\underset{\uparrow j}{1},0,\dots,0)}_{\delta_{ij}} = 0$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq 0 \end{cases}$ Kronecker-delta

$\sum_{i=1}^n r_i \delta_{ij} = 0 \implies 0+0+\dots+r_j+0+\dots+0=0$

$\implies r_j = 0$. Ez $\forall j$-re elvégezhető $\implies \forall r_j = 0$.

$\implies B^*$ lin. független.

2) Generátorrendszer.

$f \in V^*$: $f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n b_n$

$b_i^*(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_i$

$\implies f(v) = b_1^*(v)\cdot f(b_1) + \dots + b_n^* \cdot f(b_n) = \sum_{i=1}^n b_i^* f(b_i)$.

Tehát B^* generátorrendszer. □

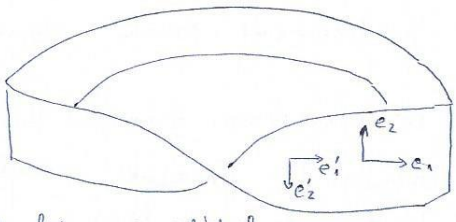
Következmény. Ha $\dim V < \infty$, akkor $\dim V = \dim V^*$. □

III. Irányíthatóság és irányítás $\mathbb{R}$-vektorterekben

Példa: Möbius-szalag. $e_1 = e_1'$

$e_2 = -e_2'$

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} < 0 \implies \lightning$



Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett.
$E=(e_1,\dots,e_n)$ bázis.
$B=(b_1,\dots,b_n)$ bázis

A kérdés az, hogy ha mozgolódunk, a bázis a visszatérés után azonos lesz-e.

báziscsere: $[p_{ij}]_{1\le i,j\le n} = P$. $\det P \neq 0$,

ahol $e_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} b_j$

Definíció. $E \sim B$ (E ekvivalens B) $\iff \det P > 0$.

↳ itt használjuk fel, hogy $\mathbb{R}$ felett vagyunk.

Állítás. $\sim$ ekvivalenciareláció.

B: 1) $E \sim E$: $P = I_n$, $\det P = 1 > 0$

2) $E \sim B \iff B \sim E$: $\det P > 0 \implies \det P^{-1} > 0$, mert $\det P \cdot \det P^{-1} = \det I$

3) $E \sim B, B \sim F \implies E \sim F$: $\det P_1 \cdot \det P_2 = \det(P_1 P_2)$, és az E-ből F-be vivő mátrix éppen $P_1 P_2$. □

$\sim$ 2 osztályra bont: $[O_1]$ $[O_2]$

$$\begin{tikzcd} A, B \arrow[r, bend left, "+"] \arrow[rr, bend right, "-"'] & & C \end{tikzcd}$$

$\det P_{A,B} > 0$

$\det P_{A,C} < 0$

$GL(V, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{a det. előjele}} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$

$GL(n, \mathbb{R})$

Bilineáris függvények

Definíció: Legyen V K feletti vektortér.

$B: V \times V \longrightarrow K$

$(v, w) \longrightarrow B(v, w)$ v-ben és w-ben is lineáris, azaz

$B(\cdot, w): v \longrightarrow B(v, w)$ és

$B(v, \cdot): w \longrightarrow B(v, w)$ is lineáris.

Ekkor B bilineáris függvény vagy bilineáris forma.

Példák: 1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow 2xy$ $\quad (x + x'; y) \longrightarrow 2(x + x')y = 2xy + 2x'y = B(x, y) + B(x', y)$

$(\lambda x, y) \longrightarrow (2xy) \cdot \lambda = \lambda B(x, y).$ $\quad \rightarrow$ blin.

2) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y)\ (u, v) \longrightarrow 3xu + 4xv - 100yv$ bilin.

Ellenpéldák: 1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$ kvadratikus, de tagonként nem lineáris

2) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y)\ (u, v) \longrightarrow xy + xu$ az első változóban nem lineáris

Definíció: B bilineáris forma szimmetrikus, ha $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$

Legyen B bilineáris forma a V K feletti vektortéren. Rögzítsük a $(b_1, \dots, b_n)$ bázist. Ekkor a $B(b_i, b_j) \in K$ számokból mátrixot alkothatunk. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $B(b_i, b_j) = B_{ij}$, ekkor a $(B_{ij})_{i,j}$ mátrixot Gram-mátrixnak nevezzük a $(b_1, \dots, b_n)$ bázishoz.

Legyen $v_1 = \sum_i \alpha_i b_i$, $v_2 = \sum_j \beta_j b_j$. Ekkor a fentiek alapján:

$$B(v_1, v_2) = B\left(\sum_i \alpha_i b_i, \sum_j \beta_j b_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j B(b_i, b_j) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j B_{ij} = \sum_{i,j} \alpha_i B_{ij} \beta_j$$

áttérve mátrixokra, ez éppen $\alpha \cdot B \cdot \beta^T$-nek felel meg ($B$ a nagy β), ahol

$$\underset{1 \times n}{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}, \quad \underset{n \times n}{B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}}, \quad \underset{n \times 1}{\beta^T = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}.$$

Vegyük észre, hogy a Gram-mátrixot adott bázisra írtuk fel. Az endomorfizmusokhoz hasonlóan most is megvizsgáljuk, hogy ez hogyan írható át másik bázisra.

Legyen tehát $(e_1, \dots, e_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ bázis V-ben.

Legyen $b_i = \sum_j p_{ij} \cdot e_j$, $(p_{ij})_{ij} = P$, $\det P \neq 0$.

Most $B^b_{ij} = B(b_i, b_j)$ a b bázis szerint, a többi jelölés értelemszerű.

$$B^b_{ij} = B\left(\sum_l p_{il} e_l, \sum_k p_{jk} e_k\right) = \sum_{l,k} p_{il} \cdot p_{jk} \cdot B(e_l, e_k) = \sum_{l,k} p_{il} B^e_{lk} p_{jk}$$

Mátrixalakban: $\boxed{B^{(b)} = P \cdot B^{(e)} \cdot P^T}$.

<u>Definíció</u>. A B bilineáris forma <u>nem degenerált</u>, ha $\forall b$ bázisra $\det B^{(b)} \neq 0$.

<u>Definíció</u>. Rögzítsünk egy bázist V-ben. A $b_1^*, \dots, b_n^*$ duális bázis, ha

$$b_j^* \circ B \circ b_i = \delta_{ij}, \text{ azaz } B(b_i, b_j^*) = \delta_{ij}.$$

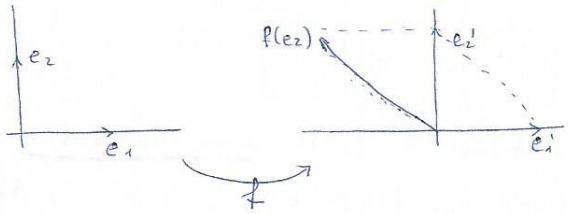
F8. Jól látható, hogy ez a def. ekvivalens a 7. oldalon levővel.

IV. Euklideszi terek

Fontos bevezetésbeli különbség van az eukl. vektortér és az eukl. affin tér között, bizonyos az utóbbiban nincs szöv. Mi most az előbbivel fogunk foglalkozni.

Transzformációkat, azon belül távolságtartókat fogunk vizsgálni.

Példa: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $e_1 \mapsto e_1'$, $e_2 \mapsto e_2' - e_1'$



f nem tartja a távolságot:

$|e_2| = 1$, $|e_2'| = \sqrt{2}$

<u>Definíció</u>. Legyen V vt. $/\mathbb{R}$. Definiáljuk a skalárszorzatot: $V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés, amely
- bilineáris függvény;
- szimmetrikus;
- pozitív definit: $B(v,v) \geq 0$ és egyenlőség $\Leftrightarrow v = 0$.

<u>Definíció</u>. Pozitív definit. Legyen $(B_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$. B pozitív definit, ha

1) $x \cdot B \cdot x^T \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;

2) $x \cdot B \cdot x^T = 0 \iff x = 0$.

Példák: 1) $\mathbb{R}^n$-ben $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Ez jól láthatóan bilineáris, szimmetrikus,

$\langle x, x \rangle = \sum x_i^2 \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0 \iff \forall x_i = 0 \iff x = 0$.

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ (azaz $A \in GL(n, \mathbb{R})$)

$\langle x, y \rangle = x \cdot A \cdot A^T \cdot y^T$

Ez szimmetrikus:

$\langle x, y \rangle = x A A^T y^T = x^{TT} \cdot A^{TT} \cdot (y \cdot A)^T = (A^T \cdot x^T)^T \cdot (y \cdot A)^T = (y \cdot A \cdot A^T \cdot x^T)^T = \langle y, x \rangle$,

felhasználva, hogy 1×1-es mátrix transzponáltja önmaga, és $C^T D^T = (DC)^T$.

A bilinearitás a disztrib. következménye.

$$\langle x, x \rangle = x \cdot A \cdot A^T \cdot x^T = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot x^T =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1} \\ \vdots \\ x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn} \end{pmatrix} \cdot (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}, \dots, x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_1 a_{1i} + \dots + x_n a_{ni})^2 \geq 0$$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff$ homogén lin. egyenletrendszer

$\Rightarrow \forall x_i = 0$.

3) Ellenpélda: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \to B(x, x) = 2 x_1 x_2 \to$ nem poz. def.

<u>Sylvester-tétel</u>. (NB.)

A B mátrix által reprezentált leképezés pozitív definit $\iff$, ha

$\det(B_{11}) > 0$,

$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} > 0$

$\vdots$,

ahol $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Példa: $B = I_n$ poz. def.: $\det I_1, \det I_2, \dots, \det I_n > 0$.

Legyen V vt. $\mathbb{R}$ felett, benne definiált $\langle , \rangle$ skalárszorzattal.

Definíció. $|v|$: v hossza. $|v|^2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

Definíció. Euklideszi vektortér: (V, B), ahol V vt $/\mathbb{R}$, B bilineáris szimm. poz. def. (s.f. sz.)

Tétel. Háromszög-egyenlőtlenség: $|v_1 - v_3| \leq |v_1 - v_2| + |v_2 - v_3|$.

Áthogalmazva: $v_1 - v_2 = u$,
$v_2 - v_3 = v$. $\longrightarrow |u - v| \leq |u| + |v|$

Bizonyítás, ha $|u| = \sum u_i^2$:

$$\sqrt{\sum (u_i - v_i)^2} \leq \sqrt{\sum u_i^2} + \sqrt{\sum v_i^2}$$

$$\sqrt{\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2\sum u_i v_i} \leq \sqrt{\sum u_i^2} + \sqrt{\sum v_i^2}$$

$$\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2\sum u_i v_i \leq \sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2}$$

CSB: $\left(\sum u_i v_i\right)^2 \leq \sum u_i^2 \sum v_i^2$ $\uparrow$ (ha LHS > 0)

Most bizonyítjuk CSB-t.

$\forall i, \forall t \in \mathbb{R}$: $(t u_i + v_i)^2 = t^2 u_i^2 + 2 t u_i v_i + v_i^2 \geqslant 0$

$\sum_i \Rightarrow$ $t^2 \cdot \sum u_i^2 + 2t \sum u_i v_i + \sum v_i^2 \geqslant 0$

$\rightarrow$ t szerint a diszkriminánsa nempos

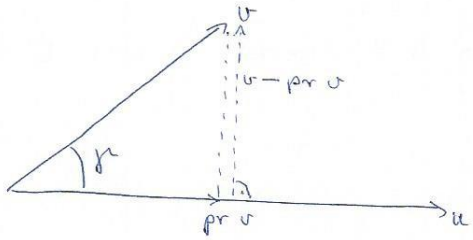
$\Rightarrow 0 \geqslant D = 4 \cdot \left(\sum u_i v_i\right)^2 - 4\left(\sum u_i^2\right)\left(\sum v_i^2\right)$

$\Rightarrow$ $\left(\sum u_i v_i\right)^2 \leq \sum_i u_i^2 \cdot \sum_i v_i^2$ $\square$

Következmény. Ha $|u| = \sum u_i^2$, $\langle u, v\rangle = \sum u_i v_i$, akkor $|\langle u, v\rangle|^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2$.

Megjegyzés: $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$. $|\langle u, v\rangle| \leq |u| \cdot |v|$

A következőkben célunk a vektorok szögének definiálása.



$(v - \mathrm{pr}\, v) \perp u$

$\langle v - \mathrm{pr}\, v; u\rangle = 0$ $\qquad \mathrm{pr}\, v = t \cdot u$

$\langle v - t \cdot u; u\rangle = 0$

$\langle v; u\rangle - \langle t \cdot u; u\rangle = \langle v, u\rangle - t \cdot \langle u, u\rangle = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \longrightarrow \mathrm{pr}\, v = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u$

$$\cos\gamma := \frac{|\mathrm{pr}\, v|}{|v|} = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot |u| \cdot \frac{1}{|v|} = \frac{\langle u, v\rangle}{|u| \cdot |v|} \in [-1; +1]$$

$\rightarrow \cos\gamma$ bijektív $[0; \pi] \longrightarrow [-1, +1]$ $\longrightarrow \gamma$ jól meghatározott.

Tehát a sk. szorzat alapján van hossz és szög is

Példák: 1) $\langle u, v\rangle = \sum u_i v_i$

2) $V = C^\infty[a, b]$ $\qquad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ $\qquad \langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx \geqslant 0$ p.d. bil. f.

3) $A, B \in V = M_n$: $\mathrm{Tr}(AB^T) = \langle A, B\rangle$

Definíció. Ortogonális bázis: olyan bázis, amiben $b_i \perp b_j$, $(i \neq j)$.
Más megfogalmazás: $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$.

Ortogonális transzformációk és bázisok

Definíció. $f: V \to V$ transzformáció l. ortogonális, ha $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$. és f lineáris.

Példa $\langle v, w \rangle = \sum v_i w_i$, ortogonális $(e_1, \dots, e_n)$ bázis esetén legyen

$$f(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j \qquad \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle \iff$$

$$\iff \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$$

Tehát f ortogonalitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ legyen (az elégségesség a linearitás miatt),

azaz $A \cdot A^T = I_n$ legyen.

$O(n) = \{ A \in M_n : A \cdot A^T = I_n \}$ ortogonális csoport

$O(n) \xrightarrow{\det} \pm 1$, a determinánsok szorzástétele miatt

$A \longmapsto \det A$

$SO(n)$ az $O(n)$ kernelje: $SO(n) = \{ A \in O(n) : \det A = +1 \}$ speciális ort. csop.

Némi csoportelméleti kitekintés

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n, \det A \neq 0 \}$ általános lineáris csoport

$\to (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ csoport: $A, B \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow AB \in GL(n, \mathbb{R})$ (det. szorz.)

$A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ (mert $\det A \neq 0$)

$I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ (det $I_n = 1 \neq 0$)

nemkommutatív

Def.
Ha G, H csoportok: $\varphi: G \to H$ csoportmorfizmus, ha $\varphi(e_G) = e_H$,
(csoporthomomorfizmus) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

Példa: $GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{ g \in G : \varphi(G) = e_H \}$ mag.

Def. $H \hookrightarrow G$ részcsoport, ha $e \in H$, $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$, $h_1^{-1} \in H$.

Áll. $\operatorname{Ker} \varphi \hookrightarrow G$

B: $h_1, h_2 \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\varphi(h_1)}_{e} \cdot \underbrace{\varphi(h_2)}_{e}}_{e} = \varphi(h_1 h_2)$

$\Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$. ✓

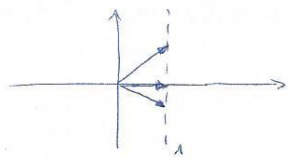
$h_1 \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \varphi(h) \cdot \varphi(h^{-1}) = \varphi(h \cdot h^{-1})$

$e_H \cdot \varphi(h^{-1}) = \varphi(e_G)$

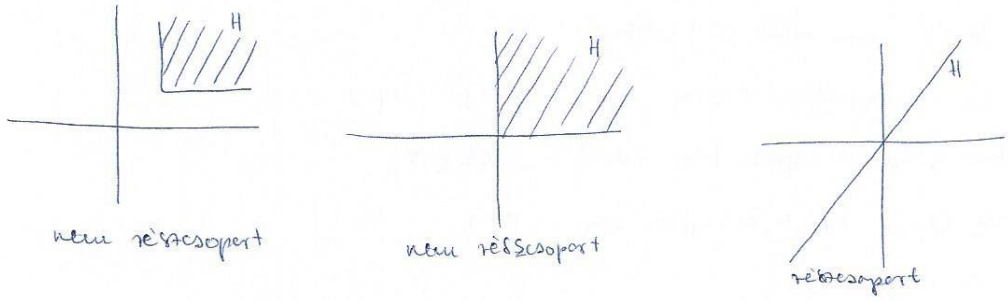
$\varphi(h^{-1}) = e_H \Rightarrow h^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$. ✓ □

Def. $H \triangleleft G$ H normálosztó G-ben, ha $H \hookrightarrow G$ és $\exists \varphi$ homomorf, hogy $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

Pl. $\mathbb{R}^2$-beli vektorok $\to$ vetítjük az x-tengelyre.
Ennek normálosztója $\{ (1, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$



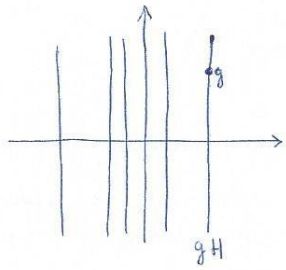
Példa. $G = (\mathbb{R}^2, +)$ részcsoportjai:



Legyen $H \subset G$, H rögzített, $g \in G$ rögzített.

Def. Jobbszeletek: $gH \subset G$: $gH = \{gh : h \in H\}$

Állítás. $\bigcup gH = G$



Példa. $G = \mathbb{R}^2$

$H = (0, k)$ $\quad k \in \mathbb{R}$

Állítás. $g_1, g_2 \in G$, $H \subset G$ $\longrightarrow$ ha $|H| < \infty$ $\Rightarrow$ $|g_1 H| = |g_2 H|$.

Def. Balszeletek: $Hg \subset G$: $Hg = \{hg : h \in H\}$

Ha G Abel-csoport: $gH = Hg$.

Definíció. Ha $H \subset G$-re gH és Hg-felosztás megegyezik $\longrightarrow$ H normál részcsoport, $H \triangleleft G$.

Alternatív definíció: $gHg^{-1} \in H$ $\forall h \in H$.

Def. $\hat{g} = gH$ szerinti osztálya (gH)

Szeretnénk műveletet definiálni az osztályokra.

$(gH) \cdot (g'H) = (gg')H$, ha $H \triangleleft G$, mert ekkor tudunk kommutálni

$G/H = \{\hat{g} : g \in G\}$

Legyen $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ csoportmorfizmus.

$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G_1 : f(g) = e_2\}$.

$\mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow G_1$: $\quad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = e_2 \cdot e_2 = e_2$

$\mathrm{Ker}\, f \triangleleft G_1$ (ld. Kiss 194–195.)

Tétel. (Gram – Schmidt-eljárás)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis egy valós vektortérben.

Ekkor
- $\exists\, e_1, \dots, e_n$ ortogonális bázis, hogy $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$;
- $\mathrm{Span}(b_1, \dots, b_k) = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k) \quad \forall k \le n$;
- Irányítás $(b_1, \dots, b_k) =$ Irányítás $(e_1, \dots, e_k)$.

BIZONYÍTÁS.

Indukcióval.

1. lépés. $b_1 \rightsquigarrow e_1 = \dfrac{b_1}{|b_1|}$ $\qquad$ e_1 kostanszorosa b_1-nek, mert $\mathrm{Span}(e_1) = \mathrm{Span}(b_1)$

$k-1 \longrightarrow k$. $(k \ge 2)$ $\qquad$ $(e_1, \dots, e_{k-1}, b_k) \downarrow (e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)$

$$b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i \perp e_1, \dots, e_{k-1}$$

$\hookrightarrow$ e_k-hoz az eddigiek alapján jutunk el.
ez lesz e_k iránya, ami $\perp$ az eddigiekre.
ez egyértelműen meghatározza a λ-kat.

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i ; e_\ell \right\rangle = 0 \qquad 1 \le \ell \le k-1$$

$$\langle b_k ; e_\ell \rangle - \left\langle \sum \lambda_i e_i ; e_\ell \right\rangle = \langle b_k, e_\ell \rangle - \sum \langle \lambda_i e_i ; e_\ell \rangle = \langle b_k, e_\ell \rangle - \delta_{i\ell} \lambda_i = 0$$

$$\boxed{\langle b_k, e_\ell \rangle = \lambda_\ell}$$

Ennek alapján $e_k \overset{\text{def}}{=} \dfrac{b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k, e_i \rangle \cdot e_i}{\left| b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k ; e_i \rangle e_i \right|}$. A Span-ra vonatkozó felt. teljesül, mert e_k a $b_1, \dots, b_k$ lin. kombja.

$\longrightarrow$ bázis lesz $(e_1, \dots, e_n)$.

Az így létrehozott $(e_1, \dots, e_n)$ bázis valóban ortogonális, sőt ortonormált (1 hosszúak).

Az $(e_1, \dots, e_{k-1}, b_k) \longrightarrow (e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)$ csere mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \circ \\ & 1 & & \circ \\ & & \ddots & \vdots \\ \circ & & 1 & \circ \\ & & & \dfrac{1}{|b_k - \sum \lambda_i e_i|} \end{pmatrix}$$

A mátrix felső Δ, így determinánsa $\dfrac{1}{|\cdots|} > 0$

$\longrightarrow$ az irányítás megmarad.

$\square$

$$\begin{tikzcd}
SL(n,\mathbb{R}) \arrow[r, phantom, "\triangleleft"] & GL(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\det"] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
SO(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "\triangleleft"] & O(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\det"] & \mathbb{Z}_2 = \{+1,-1\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ahol $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n : \det A = +1\}$ speciális lineáris csoport

$O(n)$ valóban csoport: $(AB)\cdot(AB)^T = ABB^TA^T = A\cdot I_n\cdot A^T = A\cdot A^T = I_n$, tehát $A\cdot B \in O(n)$

Az euklideszi sík transzformációi

1 dimenzióban

$\mathbb{R}^1$, $\langle , \rangle$, (e_1) ortogonális bázis

$A \in M_1$, $A\cdot A^T = I_1 \Rightarrow$ 2 lehetséges trafó vesz összesen: $A = [\pm 1]$

$e_1 \longmapsto e_1$ id

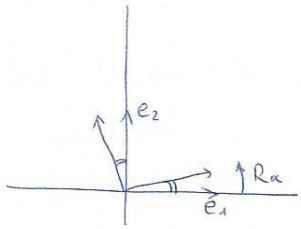
$e_1 \longmapsto -e_1$ $-$id

$O(1) = \{id, -id\} \cong \mathbb{Z}_2$ $\qquad O(1) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2$

$SO(1) = \{id\} \hookrightarrow O(1)$

2 dimenzióban

1) forgatás: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



$e_1 \to \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

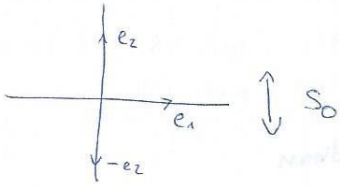
$e_2 \to \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$R_\alpha \cdot R_\alpha^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow R_\alpha \in O(2)$,

$R_\alpha \cdot R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$

$\det R_\alpha = 1$ $\qquad \{R_\alpha\}_\alpha$ csoportot alkotnak

2) tükrözés $\quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad e_1 \to e_1$, $e_2 \to (-e_2)$



$S_0 \in O(2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\det S_0 = -1$

$S_\alpha := R_\alpha \cdot S_0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$\det S_\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$S_\alpha \cdot S_\alpha^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow S_\alpha \in O(2)$

$S_\beta \cdot R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = S_{\beta-\alpha}$

$R_\alpha S_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = S_{\beta+\alpha}$

$S_\beta S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \\ -\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = R_{\beta-\alpha}$

$S_\alpha^2 = S_\alpha \cdot S_\alpha^T = id$, mert $S_\alpha \in O(2)$

Tétel. $\{R_\alpha\}_\alpha = SO(2) \triangleleft O_2 = \{R_\alpha, S_\alpha\} \xrightarrow[\substack{R_\alpha \mapsto +1 \\ S_\alpha \mapsto -1}]{\det} \mathbb{Z}_2$,

ahol $\alpha \in \mathbb{R}\Big/_{\alpha \sim \alpha + 2\pi} = \mathbb{R}\Big/_{2\pi\mathbb{Z}} = S^1$ egységkör.

($\mathbb{R}$ lefaktorizálva $2\pi\mathbb{Z}$-vel)

Azaz lin. ort. trafók csak a forgatások és a tükrözések.

Mj. $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$; $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ -val való szorzás $\sim R_\alpha$

Állítás. Legyen e_1, e_2 ortogonális bázis, f l. ortogonális trafó, $f(e_1) = e_1$.

Ha $\det f = +1 \Rightarrow f = id$,

ha $\det f = -1 \Rightarrow f = S_0$. (más nem lehet a det, mert f ortogonális)

B: f tartja a skalárszorzatot $\Rightarrow f(e_1) \perp f(e_2)$

$\Rightarrow e_1 \perp f(e_2)$

$\Rightarrow e_2 = \pm e_1$, mert mátrixos:

Mátrixszal felírva:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \begin{array}{l} \nearrow \det A = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \searrow \det A = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \Bigg\} \text{a } \perp \text{ miatt jobb felül is } 0 \text{ van.}$$

$\boxed{A}$

A tétel bizonyítása: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. ort. trafó

$e_1 \overset{?}{\rightsquigarrow} f(e_1)$

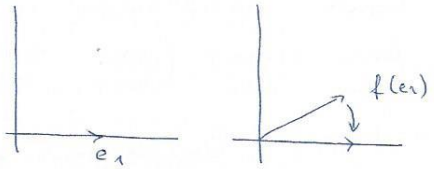
Mivel f tartja a skalárszorzatot, a hosszat is tartja: $|f(e_1)| = 1$.

Fontos (az eddigiekben is), hogy most V vektorunk az origóból induló, tehát csak helyvektoraink vannak. Ezért $f(e_1)$ az egységkörön van.

$\Rightarrow \exists R_\alpha$, hogy $R_\alpha: f(e_1) \mapsto e_1$.

visszaforgatás.

$\Rightarrow R_\alpha \circ f: e_1 \to e_1$



Ekkor $R_\alpha \circ f$-re alkalmazható a fenti állítás, mivel $O(2)$ csoport, így $R_\alpha \circ f \in O_2$.

- Ha $\det(R_\alpha \circ f) = 1 \Rightarrow R_\alpha \circ f = id \Rightarrow f = R_{-\alpha}$
- Ha $\det(R_\alpha \circ f) = -1 \Rightarrow R_\alpha \circ f = S_0 \Rightarrow f = R_{-\alpha} \circ S_0$

$\square$

3 dimenzióban

Állítás. (általános) Legyen $V(\cdot,\cdot)$ euklideszi tér, $\dim V = n$, $L: V \to V$ lineáris leképezés, L mátrixa M_L egy rögzített $b_1, \dots, b_n$ ONB-ben. Ekkor a következők ekvivalensek:

1) $M_L^T = M_L^{-1}$
2) $L^* = L^{-1}$
3) $\langle Lu, Lv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$
4) $|Lu| = |u|$
5) L ONB-t ONB-ba vit.

B: F

Definíció. L^* az L endomorfizmus adjungáltja: $L^*: V \to V$, $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle \quad \forall u, v \in V$

L^{-1} az L inverze: $L^{-1}(L(v)) = L(L^{-1}(v)) = v \quad \forall v \in V$

Állítás: L^* lineáris, egyértelmű és mátrixa M^T. (ONB)

B: Egyértelműség: tf. $\exists L_1^*, L_2^*$ adjungáltak: $\langle Lu, v\rangle = \langle u, L_1^* v\rangle = \langle u, L_2^* v\rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle u, L_1^* v\rangle - \langle u, L_2^* v\rangle = \langle u, L_1^* v - L_2^* v\rangle \quad \forall u, v \in V.$ Legyen $u = L_1^* v - L_2^* v$

$\Rightarrow 0 = \langle L_1^* v - L_2^* v, L_1^* v - L_2^* v\rangle \Rightarrow L_1^* v - L_2^* v = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow L_1^* = L_2^*.$

Lineáris: megmutatjuk, hogy M^T által definiált leképezés ilyen. Elég a bázisvektorokra, mert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bil.

$$Le_i = \sum_{j=1}^n M_{ji} e_j, \quad L^* e_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} e_j \Rightarrow \langle Le_m, e_k\rangle = \sum_{j=1}^n M_{jm} \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{ONB} = \sum M_{jm}\delta_{jk} = M_{km}$$

$$\langle e_m, L^* e_k\rangle = \sum_{j=1}^n M_{kj} \langle e_m, e_j\rangle \underset{ONB}{=} \sum M_{kj}\delta_{mj} = M_{km}$$

□

Tétel: $O(3)$-ban síkra való tükrözések ill. egyenes körüli forgatások vannak.

B: A bizonyítás elve: olyan bázist választunk, hogy az egyik vektor iránya kedvező legyen (pl. a tengely irányvektora legyen), majd veszünk egy ezzel való ONB-t. Az első vektorra $\perp$ síkban a trafó $O(2)$-beli, amit már ismerünk.

Def: merőleges altér: $v^\perp = \{u \in V : \langle u, v\rangle = 0\}$.

Ehhez szükség lesz $v \in V$-re, hogy: $v \neq \underline{0}$, $M \cdot v = \lambda \cdot v$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re.

$\exists v, \lambda \iff Mv - \lambda v = 0$

$\iff (M - \lambda I) v = 0$ Mivel $v \neq 0$:

$\iff \det(M - \lambda I) = 0.$

$\iff \exists \lambda$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix} - \lambda I\right) = 0$$

$\longrightarrow$ harmadfokú egyenlet λ-ra

$\longrightarrow$ van valós gyöke! $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

ez már meghatározza v-t

$M \in O(3) \Rightarrow \langle Mv, Mv\rangle = \langle v, v\rangle$ (M ortogonális)

$\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle$ $\mathbb{R}$-szoros bil.

$\lambda^2 \cdot \langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle$ $v \neq 0$

$\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \pm 1$. lehet.

Mivel M tartja a skalárszorzatot, $v^\perp$-et $v^\perp$-be viszi (invariáns altér, nem fix!)

Ha $u = av + bv'$, ahol $v' \in v^\perp$, akkor $Mu = \pm av + b \cdot Mv' \Rightarrow$ ha $a \neq 0$, azaz ha $u \notin v^\perp$, akkor $Mu \notin v^\perp$.

$\Rightarrow$ A trafó mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\rightarrow v^\perp$ invariáns

$v \mapsto \pm v$

$\rightarrow O(2)$-beli $v^\perp$-ben.

□

n dimenzióban

A fenti megközelítés ott bukik el, hogy páros dimenziókra a kar. polinomnak nem feltétlenül van gyöke.

Tétel: $M \in O(n)$ mátrix megfelelő ortobázisban $\mathrm{diag}(+1, -1, O(2), \dots,)$ alakú.

B: Teljes indukció n szerint; $n = 1$-re triv, $n = 2$-re volt,

az indukciós lépés során fogunk keresni egy legfeljebb 2 dimenziós invariáns alteret, és erre a W-re ill. $W^\perp$-re fogunk ind. feltevést alkalmazni.

Nem a kar. polinomot fogjuk használni, mert azzal nehéz lenne, hanem a minimálpolinomot.

Ehhez először – előkészítés gyanánt – általános vizsgalatokat végzünk.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $I, A, A^2, \dots, A^{(n^2)} \in \mathbb{R}^{n\times n} \to n^2$ dimenziós vt.

Mivel $n+1$-em vannak, szükségképpen lin. összefüggő:

$$\exists\, a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{R} \text{ nem csupa } 0 : \sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = \underline{0}$$

$$\to \exists\, p(x) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i \text{ polinom, hogy } p(A) = \underline{0}.$$

<u>Def.</u> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ minimálpolinomja az a minimális fokú 1 főegy.-s valós polinom, amire $m_A(A) = 0$.

A def. értelmes: megmutattuk, hogy ilyen polinom $\exists$,

egyértelmű: ha f és g minimális fokú $\to$ $f-g$ legalább 1-gyel kisebb fokú ξ.

(Tudjuk, hogy $\deg m_A \le n^2$)

<u>Állítás:</u> $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists$ legfeljebb 2 dimenziós invariáns altere.

($\forall A\ \exists W \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$: $\dim W \le 2$, $\forall w \in W$: $Aw \in W$).

Bi: Algebra alaptétele $\Rightarrow$ $m_A(x) = q(x)\cdot s(x)$, ahol $\deg q \le 2$.

$\Rightarrow 0 = m_A(A) = q(A)\cdot s(A)$.

Itt $s(A) \neq 0$, mert alacsonyabb fokú a minimálpolinomnál. $\Rightarrow \exists u$: $(s(A))u \neq 0$

(azért, mert pl. $s(A)$ egyik nem csupa 0 oszlopában megfelelő egysávvektort vesszük)

$v := (s(A))u$. $\Rightarrow$ $(q(A))v = \underbrace{q(A)\,s(A)}_{0} v = 0$ $\longrightarrow$ $(q(A))\cdot v = 0$, de $v \neq 0$.

$q(x) = x^2 + q_1 x + q_0$ $\to$ $(A^2 + q_1 A + q_0 I)v = 0$

$A^2 v + q_1 A v + q_0 I v = 0$ $\Rightarrow$ $A^2 v = -q_1 A v - q_0 I v$

$W := \mathrm{Span}(v, Av)$. Ez invariáns altér A-ra:

$w \in W \to w = \mu_1 A v + \mu_2 v$

$Aw = \mu_1 A^2 v + \mu_2 A v = \mu_1(-q_1 A v - q_0 I v) + \mu_2 A v = (-q_1\mu_1 + \mu_2)Av + (-q_0 I)v \in W$. $\square$

Lényeges, hogy ez az állítás $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben igaz, nem csak $O(n)$-ben!

Most bebizonyítjuk a tételt.

Ha $n \geq 3$, az M transzf. ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) van W sajátaltere, $\dim W \le 2$.

$W^\perp = \{u \in V \mid \langle u, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$ Mivel M ortogonális, ezért $W^\perp$ is invariáns altér.

$M|_W \in O(2)$ $\Rightarrow$ $\exists\, b_1, b_2$ W-beli ONB, hogy a mátrixa megfelelő alakú (incl. felterés),

$M|_{W^\perp} \in O(n-2)$ $\Rightarrow$ $\exists\, b_3, \dots, b_{n-2}$ —"——, —"——, —"—— (—"——)

Felül 0-k vannak, mert $W^\perp$ invariáns,

alul 0-k vannak, mert W invariáns.

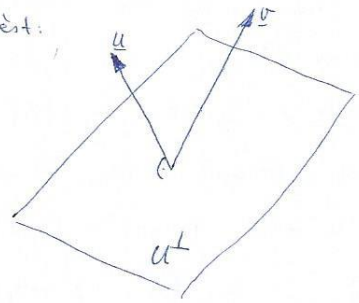
	Mb_1	Mb_2	...	Mb_n
b_1	$O(2)$ vagy		0	
b_2	$O(1)$			
$\vdots$	0		$O(n-2)$ vagy $O(n-1)$	
b_n				

$\square$

A tétel átfogalmazhatjuk: ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $M^{-1} = M^T$ (azaz $M \in O(n)$), akkor $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det P \neq 0$, $P^{-1}\cdot M \cdot P$ kívánt alakú mátrix.

<u>Következmény.</u> $M \in O(n) \Rightarrow \exists\, T_1, \dots, T_k$ legfeljebb tükrözések: $M = T_1 \circ \dots \circ T_k$, $k \leq n$.

B: Rögzítsünk egy $\underline{u}$-t! Definiáljuk az $u^\perp$-ra való tükrözést:



Ekkor $\forall \underline{v} \in V$: $\exists!\, \underline{v}_1, \underline{v}_2$: $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$,

ahol $\underline{v}_1 = \lambda \underline{u}$, $\underline{v}_2 \in u^\perp$.

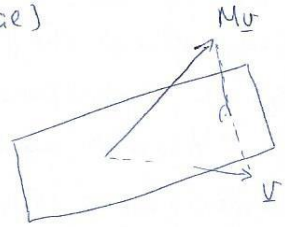
$\underline{v} \longmapsto T\underline{v} = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2$

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, \lambda u\rangle + \langle u, v_2\rangle = \lambda \langle u, u\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \Rightarrow \underline{v} = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot \underline{u} + \left(\underline{v} - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\underline{u}\right)$$

$$T\underline{v} = \underline{v} - 2\underline{u}\cdot\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}.$$ Nyilván $T^2 = I$.

Indukció: legyen $M\underline{v} \neq \underline{v}$ (ez minden $\underline{v} \in V$-re teljesül)



Keressünk T_1-et, hogy $T_1\underline{v} = M\underline{v}$.

$\Rightarrow T_1 M v = v \longrightarrow T_1 M$-nek $v^\perp$ invariáns altere

$\Rightarrow T_1 M\big|_{v^\perp} \in O(n-1)$

$\Rightarrow T_1 M = T_1' \circ T_2' \circ \dots \circ T_\ell'$ $\quad (\ell \leq n-1)$ $\quad$ indukciós felt.

$\Rightarrow M = \underbrace{T_1 \circ T_1' \circ \dots \circ T_\ell'}_{\leq n \text{ darab}}$. $\square$

<u>Feladat.</u> Írjuk fel T mátrixát!

Mo. Legyen $\underline{u} = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. $\quad Te_i = e_i - 2\frac{\langle u, e_i\rangle}{\langle u, u\rangle}u = e_i - \frac{2a_i}{\langle u, u\rangle}u$, ahol $(e_1, \dots, e_n)$ ONB.

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2a_1}{\langle u,u\rangle}a_1 & \cdots & \vdots \\ -\frac{2a_1}{\langle u,u\rangle}a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ -\frac{2a_1}{\langle u,u\rangle}a_n & \cdots & 1 - \frac{2a_n}{\langle u,u\rangle}a_n \end{pmatrix}$$

Mo.2. Vegyünk olyan ONB-t, hogy $e_1 = \frac{\underline{u}}{\langle u, u\rangle}$, $e_2, \dots, e_n$ ONB $u^\perp$-ban.

$$T\underline{e}_i = \underline{e}_i - 2\underline{u}\,\frac{\langle u, e_i\rangle}{\langle u, u\rangle} = \underline{e}_i \qquad (2 \leq i \leq n)$$

$$T\underline{e}_1 = \underline{e}_1 - 2\cdot\underline{u}\cdot\frac{\langle u, e_i\rangle}{\langle u, u\rangle} = \underline{e}_1 - 2\underline{u}\cdot\frac{|u|\cdot 1}{|u|^2} = \underline{e}_1 - 2\underline{e}_1 = -\underline{e}_1$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Állítás.</u> $T \in O(n)$.

B: $T\cdot T^T = T^2 = I_n$. $\square$

Gömbök euklideszi térben

Def. $S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : |v| = 1 \}$ egységgömb $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

Előfordul, hogy $\mathbb{R}^n$-ben többféle struktúra is van. Ez a helyzet $n=2$-re:

$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x,y) \longleftrightarrow x+iy = z \qquad |z|^2 = z\bar{z} \qquad \longrightarrow S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1 \}$$

Ennek itt célunk, hogy $\mathbb{C}$ elemei között van szorzás.

$$z, w \in S^1 \longrightarrow |z \cdot w|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\,\bar{w}\bar{z} = z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow z \cdot w \in S^1$$

$$z^{-1} = \bar{z} \qquad \Rightarrow (S^1, \cdot) \text{ csoport}$$

$$S^1 \longrightarrow SO(2)$$

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \longrightarrow R_\alpha : z \mapsto e^{i\alpha} z$$

Ez csoportizomorfizmus, mert $e^{i\alpha_1} \mapsto R_{\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2} \mapsto R_{\alpha_2}$, $e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \mapsto R_{\alpha_1+\alpha_2}$ – ez teljesül, hogy $R_{\alpha_1} \cdot R_{\alpha_2} = R_{\alpha_1+\alpha_2}$.

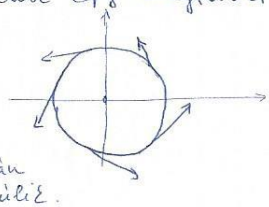
Milyen n-re lesz S^n csoport? $n = 0, 1, 3, 7$-re.

Ehhez kell egy $S^n \times S^n \xrightarrow{m} S^n$ leképezés, ami folytonos és teljesíti a csoport axiómáit.

(A folytonosság itt szemléletesen annyit tesz, hogy kis változtatásra kicsit változik, formálisabban: $\forall U \subset S^n$ nyílt halmazra $m^{-1}(U) \subset S^n \times S^n$ nyílt.)

Ez tulajdonképpen azzal tehető ekvivalenssé, hogy az alakzatnak van egy megfésült vektormezője. Ez $n=2$-re nem valósítható meg. (Sündisznósörfésülési tétel, hairy ball theorem)

($\hookrightarrow \forall x \in S^n \ \exists f(x) : |f(x)| = 1$ vektormező)



Ez, mármint S^n csoport volta algebrai szükséges, az ilyen dimenziós struktúrán múlik.

$n=3 \longrightarrow$ kvaterniók: $(\mathbb{R}^4, \cdot) = \mathbb{Q}$

$$(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow q = x + iy + jz + kw, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

$$q\bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \longrightarrow |q|^2 = q\bar{q} \text{ definiálható}$$

$S^3 \subset \mathbb{R}^4$, $(S^3, \cdot_Q)$ csoport, mert: egységgyökök szorzata egységgyökszerű (kiszámolható), z^{-1} megadható: $z \cdot z^{-1} = 1 \longrightarrow$ 4 egyenlet, 4 ismeretlen

Van-e itt is izomorfizmus $SO(4)$-gyel? nincs, de homo. van.

$$S^3 \xrightarrow{\varphi} SO(4) \qquad (\dim SO(4) = 6,\ \dim S^3 = 3)$$

$$q \longmapsto \varphi(q) = \begin{bmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{bmatrix}$$

Van kapcsolat $SO(3)$-mal:

Legyen $q \longmapsto (\varphi'(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$, ahol $(\varphi'(q))(r) = q \cdot r \cdot \bar{q} \quad \forall r$

Tulajdonságok:

1) $\operatorname{Re} r = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re}(q r \bar{q}) = 0$

$$q = x + iy + jz + kw, \quad r = ai + bj + ck$$

$$\operatorname{Re}(q \cdot r \cdot \bar{q}) = \operatorname{Re}\big((x+iy+jz+kw)(ai+bj+ck)(x-iy-jz-kw)\big) =$$

$$= (-ay - bz - ck) \cdot x - (xa + zc - wb)y - (xb + wa - yc)z - (xc + yb - za)w$$

F14 2) $\varphi(q)$ lineáris, ortogonális, determinánsa 1

3) $S^3 \xrightarrow{\varphi} SO(3)$ csop. hom, mert $\varphi(q_1 q_2) = \varphi(q_1)\varphi(q_2) \Leftrightarrow q_1 q_2 r \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 r \bar{q}_2 \bar{q}_1$, felhasználva az $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ azonosságot és az asszociativitást.

4) $\{q \in S^3 : qq' = q'q \ \forall q' \in Q\} = \{\pm 1\}$ és ez normálosztó, $S^3/\{\pm 1\} = SO(3)$.

B: Legyen $q = ax + bi + cj + dk$, $q' = x + yi + zj + wk$. $\forall x,y,z,w \in \mathbb{R}$

$$qq' = (ax - by - cz - dw) + i(ay + bx \boxed{+ cw - dz}) + j(az + cx \boxed{+ dy - bw}) + k(aw + dx \boxed{+ bz - cy})$$

$$q'q = (ax - by - cz - dw) + i(ay + bx \boxed{- cw + dz}) + j(az + cx \boxed{- dy + bw}) + k(aw + dx \boxed{- bz + cy})$$

$\Rightarrow b = c = d = 0$. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \to a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ és az tényleg jó. ✓

$\{\pm 1\} = \ker \varphi$ teljesül. ✓ $\Rightarrow \{\pm 1\} \triangleleft S^3 \hookrightarrow SO(3)$.

$\varphi^{-1}(M)$ 2 ellentétes pont lesz S^3-on.

Vektoriális szorzás

$V = \mathbb{R}^3$, $\langle , \rangle$, irányítás, e_1, e_2, e_3 ONB

$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$
$w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ $\longrightarrow \langle v, w \rangle = \sum a_i b_i = |v| \cdot |w| \cdot \cos\varphi$

Def. $\times : V \times V \longrightarrow V$ vektoriális szorzat

$$(v, w) \longmapsto v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3.$$

Tulajdonságok

1) $v \times w = -w \times v$, mert sorcsere

2) Ha v és w lin. öf. $\Rightarrow v \times w = 0$, mert lin. öf sorok.

3) $u = \sum c_i e_i$. $\Rightarrow \langle (v \times w), u \rangle = (a_2 b_3 - b_2 a_3) c_1 + (a_3 b_1 + b_3 a_1) c_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) c_3 =$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := vwu$$ Hármasszorzat / vegyesszorzat

4) $v \times w \perp v$, $v \times w \perp w$, mert

$vwv = 0$ és $vww = 0$, nyilvánvaló 2 sor azonos.

5) $|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin\varphi$

B: $|v \times w|^2 = (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 =$

$= a_1^2 (b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_3^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_2 b_3 b_2 a_3 + a_3 b_1 b_3 a_1 + a_1 b_2 b_1 a_2) =$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2(\cdots) =$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$

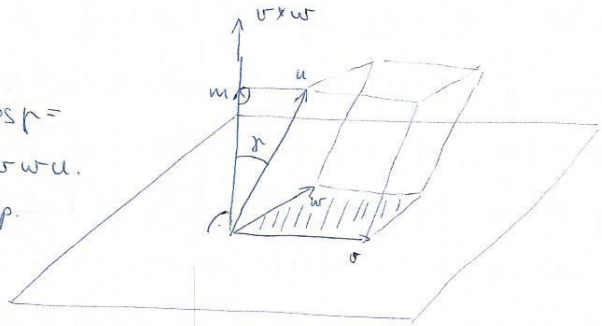
$= |v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v, w \rangle^2 = |v|^2 |w|^2 - |v|^2 \cdot |w|^2 \cos^2\varphi = |v|^2 |w|^2 \cdot \sin^2\varphi$.

6) Ha v és w lineárisan függetlenek, akkor $v, w, v \times w$ pozitívan irányított bázis.

B:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ (v \times w)_1 & (v \times w)_2 & (v \times w)_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (v \times w)_1 & (v \times w)_2 & (v \times w)_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = vw(v \times w) = \langle v \times w, v \times w \rangle > 0,$$

mert $v \times w \neq 0$

Vegyünk egy poz. irányított bázist! v, w, u



$$\left.\begin{aligned} T_a &= |v\times w| \\ |m| &= |u|\cos\gamma \end{aligned}\right\} V = T\cdot|m| = |v\times w|\,|u|\cos\gamma = \langle v\times w, u\rangle = vwu.$$

7) v, w, u poz. ir.b. $\Rightarrow$ a kifeszített paralelepip. térfogata $V = vwu$.

8) $(a\times b)\times c = -\langle c,b\rangle a + \langle c,a\rangle b$ <u>kifejtési tétel</u>

B: $(a\times b)\times c = (a_2b_3 - b_2a_3,\ a_3b_1 - b_3a_1,\ a_1b_2 - b_1a_2)\times(c_1, c_2, c_3) =$

$= \big((a_3b_1 - b_3a_1)c_3 - (a_1b_2 - b_1a_2)c_2,\ (a_1b_2 - b_1a_2)c_1 - (a_2b_3 - b_2a_3)c_3,\ (a_2b_3 - b_2a_3)c_2 - (a_3b_1 - b_3a_1)c_1\big)$

$$-\langle c,b\rangle a + \langle c,a\rangle b = \begin{bmatrix} \cancel{a_1b_1c_1} - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 + \cancel{a_1b_1c_1} + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ -a_2b_1c_1 - \cancel{a_2b_2c_2} - a_2b_3c_3 + a_1b_2c_1 + \cancel{a_2b_2c_2} + a_3b_2c_3 \\ -a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 - \cancel{a_3b_3c_3} + a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + \cancel{a_3b_3c_3} \end{bmatrix}$$

9) <u>Jacobi-azonosság</u>: $(a\times b)\times c + (b\times c)\times a + (c\times a)\times b = 0$,

mert $-\langle c,b\rangle a + \langle c,a\rangle b - \langle a,c\rangle b + \langle a,b\rangle c - \langle b,a\rangle c + \langle b,c\rangle a = 0$.

<u>Def.</u> <u>Lie-algebra</u> V vt, $[\,,\,]: V\times V \longrightarrow V$ Lie-szorzás

$(a,b) \longmapsto [a,b]$, amire 1) $[a,b] = -[b,a]$ és

2) $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$.

Pl. – $\mathbb{R}3$-ban $[a,b] = a\times b$-re Lie-a.

– $V = M_n$-re, $[A,B] = AB - BA$ $\longrightarrow$ <u>általános lineáris Lie-algebra</u>

— o —

Geometria általában

– Legyen távolságfüggvény: $P, Q \longmapsto d(P,Q)$

– Egyenesek: legrövidebb utak

– Szög: euklideszi térben $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x,y\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$ kifejezhető,

cosszal: $\cos\varphi = \dfrac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|} \longrightarrow \varphi\in[0,\pi]$

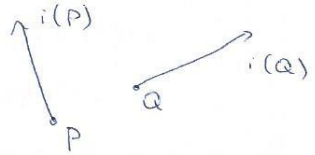
Ezekhez csak a távolság kellett.

Transzformáció: $T \xrightarrow{\varphi} T$, ahol φ megőrzi a távolságot és a rá épülő tulajdonságokat, struktúrákat (szög, egyenes...)

<u>Homogenitás</u>: „minden pont és minden szög egyforma"

Ha P és Q tetsz. pontok, $i(P)$ és $i(Q)$ tetsz. irányok P-ben és Q-ben, akkor legyen olyan transz., hogy $P\to Q$, $i(P)\to i(Q)$.

„Szép" homogén geometriára teljesül:



1) homogén

2) a lokális inicidenciák olyanok, mint az eukl. térben, azaz

$$\left.\begin{aligned} &\text{i) } \forall P, i(P) \longrightarrow \exists\ P\text{-ből } i(P) \text{ irányú egyenes} \\ &\text{ii) } \forall P\neq Q \longrightarrow \exists\, e: \{P,Q\}\subset e \\ &\text{iii) } \forall e_1, e_2 \longrightarrow \#(e_1\cap e_2)\leq 1. \end{aligned}\right\} \text{kis környezetben}$$

Lényegében 3 olyan kétdimenziós geometria van, ami ezeket kielégíti (bizonyított):

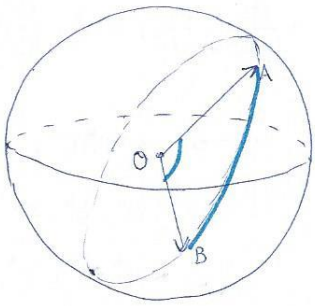
– euklideszi

– gömbi

– Bolyai — Lobacsevszkij / projektív.

V. Gömbi geometria

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$



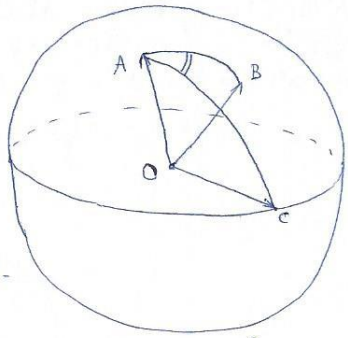
A pontokat vektorokkal azonosítjuk. A pont $= \overrightarrow{OA}$

Távolság: $d(A,B) = \overline{AB}$ hossza az AB főkörön,
azaz tulajdonképpen $AOB\measuredangle = \arccos\langle A,B\rangle \in [0,\pi]$

Egyenes: főkörök / nagykörívek

Szakasz: a főkörök ívei

Szög: AB és AC szöge az OAB és OAC síkok szöge.

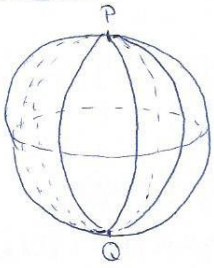


Miért lesz az homogén? (plausibilis megoldás)

Tratók: $SO(3)$, $(O(3))$

Bármely pontot bármelyikbe elvisz és tetsz irányt el tud vinni tetsz. irányba. (Miután a vektort elforgatjuk, a transzformációban van még szabadság.)

„Szép":
i) tetsz irányú egyenes van ✓
ii) P és Q között van főkör: gond csak akkor, ha átellenes pólusa → akkor is van, ráadásul ∞ sok ✓
iii) $e_1 \cap e_2$ → lokálisan igaz: egy metszéspont kis környezetében nincs másik. (Globálisan nem teljesül.) ✗



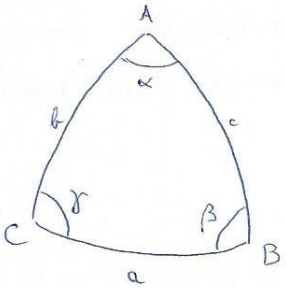
Fontos látni, hogy mi itt valamit! Kívülről nézünk rá, $\mathbb{R}^3$-ban vizsgáljuk. A valódi, belső vizsgálat olyan lenne, hogy megadjuk a távolságfüggvényt, és ebből mindent kiszámolunk. (A távolságfüggvény képlettel az ívhossz kiszámításában jelenik meg, pl. $\mathbb{R}^2$-ben

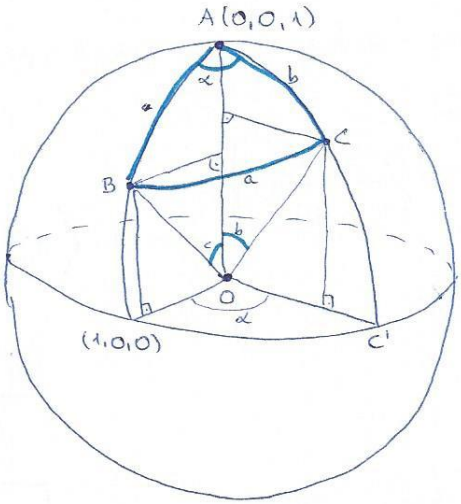
$ds^2 = dx^2+dy^2 \longrightarrow l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$, ahol

$\gamma = \{x(t), y(t)\}_{t\in[0,1]}$.)

Gömbi trigonometria

Különbség lesz a síkhoz képest: itt 3 oldal és 3 ∡ is meghatároz egy Δ-et (nincs hasonlóság).





Koszinusztétel oldalakra.

$A(0,0,1)$

$B(\sin c,\ 0,\ \cos c)$ $\qquad C'(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$

$C(\sin b \cdot C' + \cos b \cdot A) = (\sin b\cos\alpha,\ \sin b \sin\alpha,\ \cos b)$

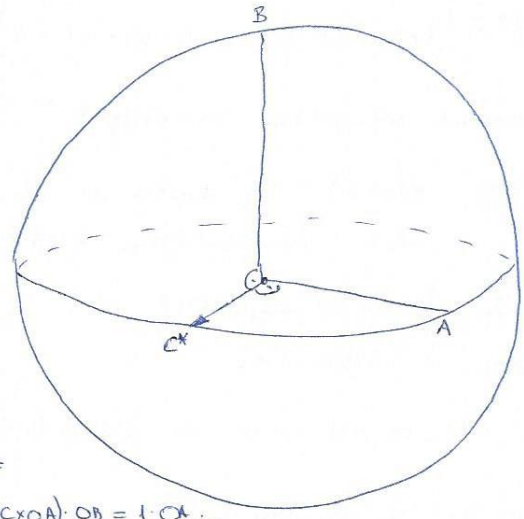
$\cos a = \langle OB, OC\rangle = \sin c \cdot \sin b \cdot \cos\alpha + \cos b \cos c$

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cdot \cos\alpha} \qquad a,b,c \longrightarrow \alpha$$

Megj. Ha $a,b,c \to 0 \longrightarrow$ tartunk a síkbeli esethez. Taylor-sorfejtés: konstansra $1 = 1\cdot 1$, lineárisra $0=0$, kvadratikusra $-\frac{a^2}{2} = -\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + bc\cos\alpha$

Def: Ha $ABC\Delta$ pozitívan irányított $\longrightarrow \exists A^*B^*C^*$ <u>duális/poláris</u> Δ: $OA^* \perp OB, OC$ és B, C, A^* pozitívan irányított. stb.

$$\Rightarrow OA^* = \frac{OB \times OC}{|OB \times OC|}, \quad OB^* = \frac{OC \times OA}{|OC \times OA|}, \quad OC^* = \frac{OA \times OB}{|OA \times OB|}$$



$ABC_\Delta \longrightarrow A^*B^*C^*_\Delta$

$a, b, c \qquad a^*, b^*, c^*$

$\alpha, \beta, \gamma \qquad \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$

Állítás: $A^*B^*C^*$ polárisa ABC.

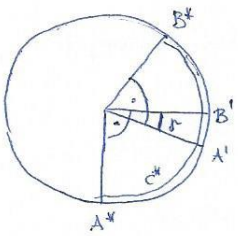
B: $A^{**} = \frac{B^* \times C^*}{|B^* \times C^*|} = \frac{1}{||\cdot||\cdot||} \cdot ((C \times A) \times (A \times B)) = \frac{1}{\dots}(OA \cdot ((OC \times OA) \cdot OB) - OB \cdot (OC \times OA) \cdot OA) =$

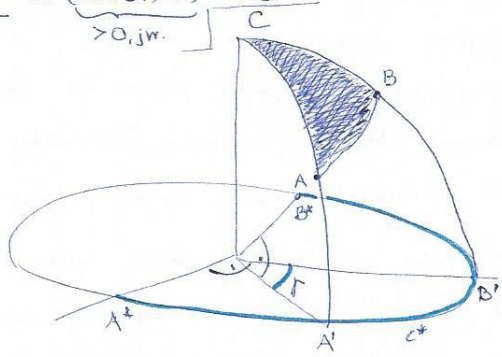
$= \underbrace{\frac{1}{\dots}}_{>0} \cdot OA \cdot \underbrace{(OC \times OA) \cdot OB}_{>0, \text{ jw.}} = 1 \cdot OA.$

Tétel. $\alpha + a^* = \beta + b^* = \gamma + c^* = \pi$

$\alpha^* + a = \beta^* + b = \gamma^* + c = \pi.$

Biz:





<u>Kosinusztétel négyelve.</u>

Kosinusztétel oldalakra $A^*B^*C^*_\Delta$-ben:

$$\cos a^* = \cos b^* \cos c^* + \sin b^* \sin c^* \cos \alpha^*$$

$$-\cos \alpha = (-\cos\beta)(-\cos\gamma) + (+\sin\beta)(+\sin\gamma)(-\cos a)$$

$$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a} \qquad \alpha, \beta, \gamma \longrightarrow a$$

Ha $a, b, c \to 0$: konstans tagban $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$

$\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) \longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\Rightarrow$ Ha $a, b, c \to 0$, $\alpha + \beta + \gamma \to \pi^+$ (a felülről tartást később látjuk majd).

<u>Szinusztétel.</u>

$$\left.\begin{aligned} C^* &= \frac{A \times B}{|A \times B|} \\ \frac{A^* \times B^*}{|A^* \times B^*|} &= C \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\langle C^*, \frac{A^* \times B^*}{|A^* \times B^*|} \right\rangle = \left\langle \frac{A \times B}{|A \times B|}, C \right\rangle$$

$$\frac{(C^*, A^*, B^*)}{|A^* \times B^*|} = \frac{(A, B, C)}{|A \times B|}$$

$$\Rightarrow \frac{(A, B, C)}{(A^*, B^*, C^*)} = \frac{\sin c}{\sin c^*} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}} = \frac{(A, B, C)}{(A^*, B^*, C^*)}$$

Autoduális tétel.

$a, b, c \to 0 \Rightarrow$ lineárisban $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

A derékszögű gömbháromszög trigonometriája

$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cdot 0$

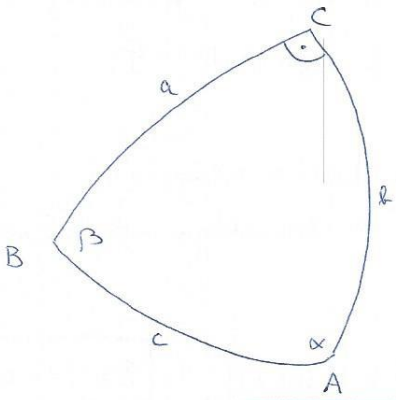
$\downarrow$

$\boxed{\cos c = \cos b \cos a}$ Pitagorasz-tétel

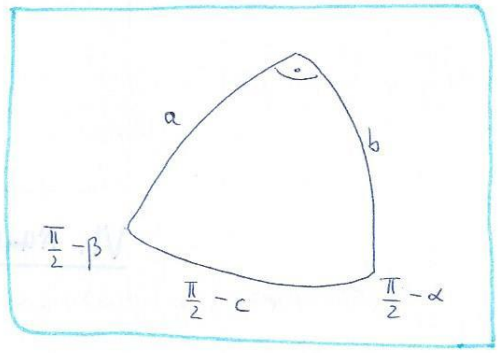
$\underbrace{\cos\gamma}_{0} = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$

$\downarrow$

$\boxed{\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}$



Napier-szabály: bármelyik kifejezés szinusza =
= szomszédos tg-ének szorzata =
= nemszomszédos cosinusainak szorzata.



Háromszög-egyenlőtlenségek

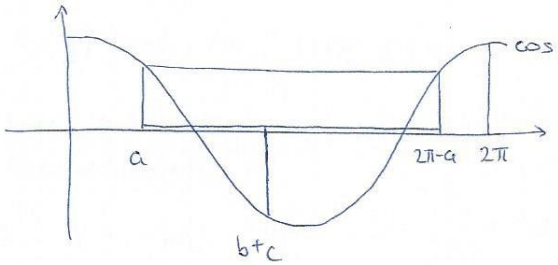
$\cos a = \cos b \cos c + \underbrace{\sin b \sin c}_{\geq 0} \underbrace{\cos\alpha}_{\geq -1}$

$\downarrow$

$\cos a > \cos b \cos c - \sin b \sin c$

$\boxed{\cos a > \cos(b+c)}$

$\ominus$: degenerált eset

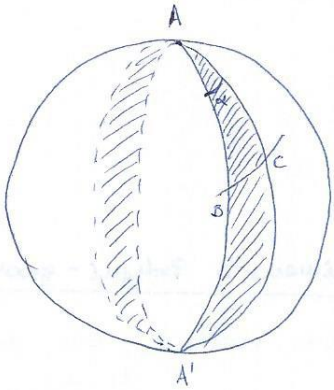


$a < b+c < 2\pi - a \longrightarrow$ (1) $a < b+c$

(2) $a+b+c < 2\pi$ (ennek nincs síkbeli megfelelője)

Duálisan: $a^* < b^* + c^* \longrightarrow$ (1*) $\beta + \gamma < \pi + \alpha$

$a^* + b^* + c^* < 2\pi \longrightarrow$ (2*) $\pi < \alpha + \beta + \gamma$.



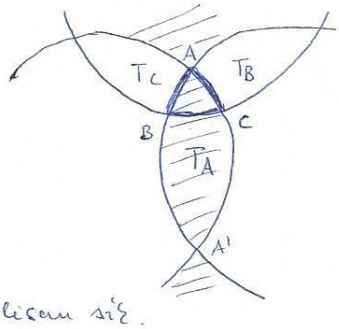
Itt kelmerül: mennyi $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$?

<u>Tétel.</u> $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \operatorname{Ter}(\Delta)$

Bi. $\dfrac{T_A}{T_{S^2}} = \dfrac{2\alpha}{2\pi} \longrightarrow T_A = \dfrac{\alpha}{\pi}\cdot 4\pi = 4\alpha$

$T_A + T_B + T_C = T_{S^2} + 4\,T_{ABC\Delta}$

$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\,T_{ABC\Delta}$ $\square$



Gauss-görbület a P pontban:

$K_P = \lim\limits_{\Delta\to P} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{T_{ABC\Delta}}$. Homogén térben a lim nem kell.
Síkban 0, gömbön 1, hip.ban: −1.

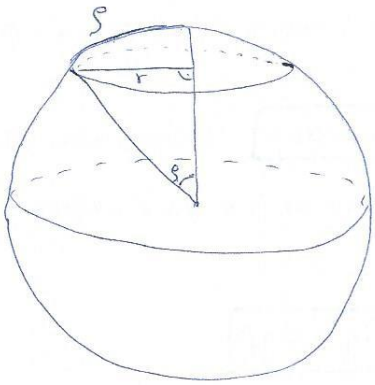
$S^2(R)$: $x^2+y^2+z^2=R^2$ gömbre $\operatorname{Ter}_R(\Delta) = \operatorname{Ter}_1(\Delta)\cdot R^2$

$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma-\pi = \dfrac{\operatorname{Ter}_R(\Delta)}{R^2} \longrightarrow K_P = 1/R^2$, nagy gömb lokálisan sík.

Körök

Def. Kör: ponttól a felületen mért távolság állandó.

$$K(O,\rho) = \{ x \in S^2 \mid d_{S^2}(x,O) = \rho \}$$



Kerület

$r = \sin\rho \longrightarrow$ síkbeli képlet alapján:

$\boxed{\text{Ker} = 2\pi \sin\rho}$ $\longrightarrow$ lassabban nő, mint síkban

Terület

$$\int_0^\rho 2\pi \sin x \, dx = \left[2\pi(-\cos x)\right]_0^\rho = \boxed{2\pi(1-\cos\rho)}$$

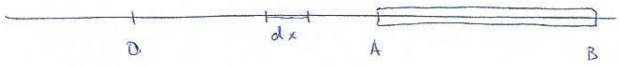
$$\text{Ter}(\rho) = \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4!} + \dots\right) 2\pi = \underbrace{\pi\rho^2}_{\text{síkbeli}} - \frac{\pi\rho^4}{12} + \dots$$

VI. Általános modellek, Bolyai-geo.

A geometriát tulajdonképpen meghatározza, hogy hogyan adjuk meg az ívhosszat.

Példa:

- $\mathbb{R}$-ben: $\int_A^B dx = [x]_A^B$



- $\mathbb{R}^2$-ben: $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \longrightarrow \text{hossz}(\gamma) = \int_A^B \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$; fontos, hogy csak a γ képétől függ, a parametrizálástól nem

- $\mathbb{R}^n$-ben: $ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$, ahol $(x_1, \dots, x_n)$ a koordináták

Általános geometriában (Riemann)

$ds^2 = E(x,y)\,dx^2 + F(x,y)\,dx\,dy + G(x,y)\,dy^2$ 2 dimenzióban

$\text{hossz}(\gamma) = \int_\gamma ds$

$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j$ n-dimenzióban

$g_{ij} = g_{ji}$ (az ún. Riemann-tenzor)

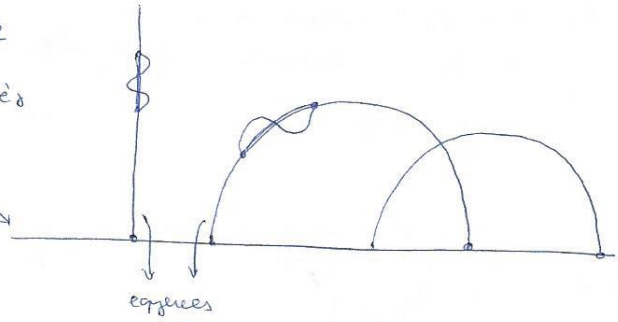
Kétdimenziós Bolyai-geometria és modellek

Sétáló modell; nem olyan egyszerű, mint a gömbi

Másik modell: $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y>0\}$ felső félsík

$ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ → megmutatható, hogy konform lét

A hatványvonalegyenes a ∞-ben van.



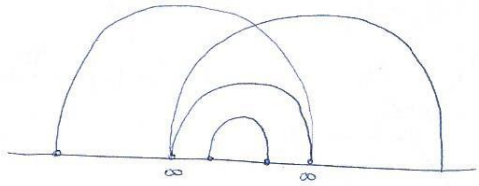
Szög: félkörök érintőinek szöge

Párhuzamos: a ∞-ben érint.

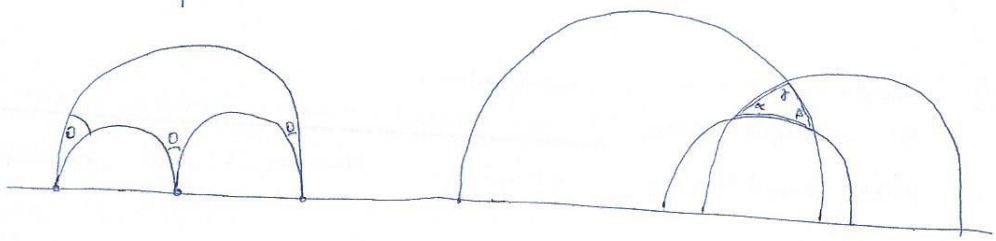
→ nem ugyanaz, mint a nincs körös pontjuk!

Δ szögösszege: $\alpha+\beta+\gamma < \pi$

Lehet $\alpha+\beta+\gamma=0$ is, ha 3 $\parallel$ egyenes az oldalai



$$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{T_\Delta} = -1 = K_p$$



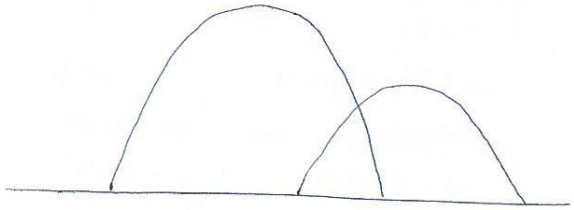
Modell $\mathbb{R}^2$-re ...

Tér $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y>0\}$

Egyenesek: $y = A\sin(x-a)$

$y = A'\sin(x-a')$

szög $= \dfrac{a-a'}{\text{ugyanilyen szög}}$



VII. Affin terek

Definíció. Legyen G csoport, $X(\neq\emptyset)$ halmaz. Azt mondjuk, hogy G hat X-en, ha adott egy $G\times X \to X$ leképezés, amelyre teljesülnek a

$(g,x) \mapsto f(g,x) = g*x$

következő tulajdonságok: $e_G * x = x \quad \forall x$

$h*(g*x) = (h\cdot g)*x \quad \forall g,h \quad \forall x$

Példák. 1) $G = GL(n,K)$, $X = K^n$ $\qquad A\in G,\ v\in X \to$ $A*v = A\cdot v \in K^n$

$I*v = I\cdot v \in K^n$

$A*(B*v) = A\cdot(Bv) = (AB)v$

2) $G = O(n)$, $X = K^n$

3) $H\subset G$, G hat X-en $\Rightarrow$ H is hat X-en

4) $X = \{\mathcal{F}, \mathcal{B}\}$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1,+1\}$ $\qquad 1*\mathcal{F} = \mathcal{F}$, $(-1)*\mathcal{F} = \mathcal{B}$; $1*\mathcal{B} = \mathcal{B}$, $(-1)*\mathcal{B} = \mathcal{F}$ } „izomorfak", de a különbség, hogy X-en nincs művelet!

5) G csoport $\qquad \underset{\text{csop}}{G} \times \underset{\text{halmaz}}{G} \xrightarrow{\mu} \underset{\text{halmaz (}\emptyset\text{ struktúra)}}{G}$

$g\in G,\ x\in G \to g*x = \mu(g,x) = gx$

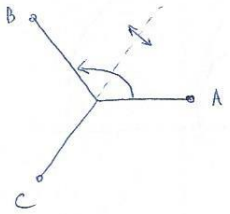
6) $G = (\mathbb{R}, +)$ additív csoport

$X = \mathbb{R}$ pontokat origó nélkül

$a * p = a + p$

$(\mathbb{R}, +)$ $\qquad$ $\mathbb{R}$

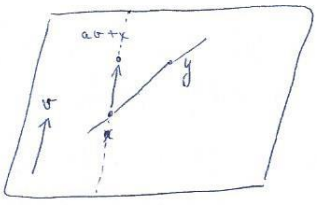
7) $G = \mathfrak{S}_3 = S_3$ szimm. csoport



$(A, B, C) \xrightarrow{\sigma *} (A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma)$

<u>Definíció.</u> Legyen $G \times X \to X$ csoporthatás.
Azt mondjuk, hogy X G-homogén ezen a hatásra nézve, ha tranzitív,
azaz $\forall x, y \in X, \exists g : g * x = y$ (bármely 2 elem egymásba vihető).

<u>Példa.</u> 1) $G = (\mathbb{R}, +)$ $\quad a * p = a + p$
$X = \mathbb{R}$ homogén



2) $G = \mathbb{R}$
$X = \mathbb{R}^2$
$v \in \mathbb{R}^2$ rögzített $\qquad a \in G : \quad a * x = x + av$
Inhomogén, mert ha x és y egyenese $\nparallel v$, nem vihetők egymásba

3) $G \times G \to G \quad : \quad g = y \cdot x^{-1}$ homogén

4) $GL(n, K) \times K^n \to K^n$ homogén

5) $O(n) \times K^n \to K^n$ inhomogén (pl. különböző hosszú vektorok nem vihetők egymásba)

6) $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ homogén

<u>Kérdés.</u> Adott $x \in S^{n-1}$-re $\{A \in O(n) : A * x = x\} = ?$
Ha x-et örzi: a rá $\perp$ hipersíkot is örzi.
Megmutatható, hogy $\{A \in O(n) : A * x = x\} \approx O(n-1)$.

<u>Definíció.</u> Legyen adott $G \times X \to X$ hatás, legyen X G-homogén.
Ekkor X G-torzor / G-főhomogén / principiális G-homogén, ha
$\forall x, y \in X \ \exists! \ g : g * x = y$.

<u>Példák.</u> 1) $G \times G \to G$ $\qquad x, y \in G : \exists! \ g = yx^{-1} \to g * x = y \to$ G-torzor

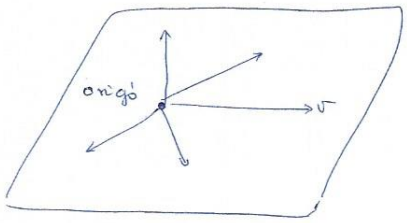
2) $SO(3) \times S^2 \to S^2$ $\qquad g = kl$ jó $x = y$-ra, de az x körüli forgatásos is jó $\to$ nem egyértelmű $\to$ nem G-torzor

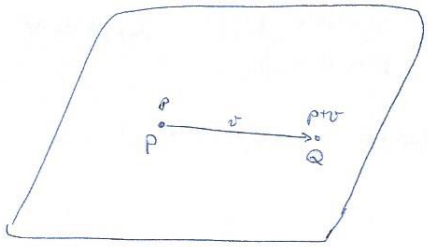
3) $SO(2) \times S^1 \to S^1$ $\qquad \to$ G-torzor

Affin terek és alterek

Def. Affin tér: K feletti V vektortér torzora.

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(x, v) \longmapsto v * x = x + v$$





V vektortér K felett

$Q = P + v$

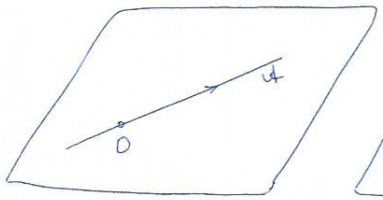
$v = \overrightarrow{PQ} \in V$

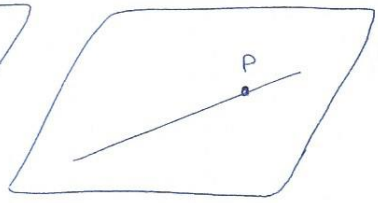
X affin tér (V struktúra nélkül)

Def. $\overrightarrow{PQ}$ az a vektor, amire $p + v = q$ $(v \in V)$.

Def. Affin altér: $A = \{P \in X,\ \mathcal{A} \leq V\} = \{p + v,\ v \in \mathcal{A}\}$,

ahol $\mathcal{A}$ lineáris altér V-ben.





$\mathcal{A} \leq V$

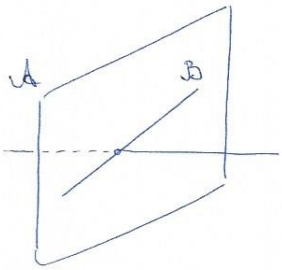
Állítás. $Q \in A = \{p + v : v \in \mathcal{A}\} \implies \{q + v : v \in \mathcal{A}\} = \{p + v : v \in \mathcal{A}\}$

B: $Q \in A \implies q = p + w \implies \{q + v : v \in \mathcal{A}\} = \{p + w + v : v \in \mathcal{A}\} = \{p + u : u \in \mathcal{A}\} \subseteq \{p + v : v \in \mathcal{A}\}$

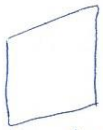
$p + v = p + \underbrace{w + (v - w)}_{} \implies \{p + u : u \in \mathcal{A}\} \supseteq \{p + v : v \in \mathcal{A}\}$.

v felbontása; $\mathcal{A}$ altér, ezért $w \in \mathcal{A}$, $(v - w) \in \mathcal{A}$

$\square$



Definíció. Altér dimenziója: $\dim A = \dim \mathcal{A}$.



$\dim A = 2$

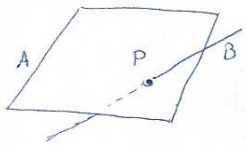
$\dim B = 1$.

Tulajdonságok

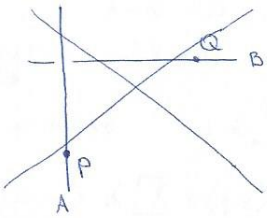
a) bebolyozás: $P \in X$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset V \implies P + \mathcal{A} \subset P + \mathcal{B}$, $A \subset B$

b) A, B affin alterek $\to \exists!\ (A \vee B)$: a legkisebb affin altér bebolyozásra nézve, ami tartalmazza A-t és B-t is. („lukó")

1. eset: $A \cap B \neq \emptyset \longrightarrow P \in A \cap B$



$\implies \exists\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$: $A = \mathcal{A} + P$, $B = \mathcal{B} + P$



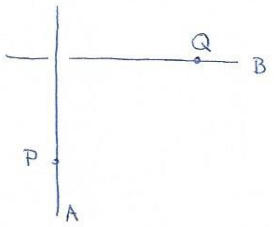
Ekkor $A \vee B = P + (\mathcal{A} + \mathcal{B})$, mert ez tartalmazza A-t és B-t és minimális.

$\dim(A \vee B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$

---

2. eset. $A \cap B = \emptyset$ $\quad A = P + \mathcal{A}$ $\quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$

$B = P + \mathcal{B}$



Ekkor $A \vee B = P + (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathrm{Span}(\overrightarrow{PQ}))$.

c) $\exists! (A \wedge B)$ = az a legnagyobb altér, ami A-ban és B-ben is benne van.

1. eset. $A \cap B = \emptyset \longrightarrow A \wedge B = \emptyset$

2. eset. $A \cap B \neq \emptyset \longrightarrow \exists P \in A \cap B \longrightarrow A \wedge B = P + (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

d) Def. párhuzamosság: $A = P + \mathcal{A}$, $B = Q + \mathcal{B}$-re:

$$A \parallel B \iff \big((\mathcal{A} \subset \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \subset \mathcal{A})\big).$$

Ha $A \parallel B \implies A \cap B = \emptyset$ vagy

$A \subset B$ vagy

$B \subset A$.

Affin alterek paraméterezései

Legyen V vt. K felett, $A = P + \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset V$ lineáris altér.

$\dim_K V = n$. $(V \simeq K^n)$, $v = \sum \lambda_i b_i$

Legyen $d = \dim \mathcal{A}$, és válasszunk bázist: $f_1, \dots, f_d$

$v \in \mathcal{A} \iff v = \sum \lambda_i f_i$

$A = \{P + \sum \lambda_i f_i\}$ $\quad (\lambda_i \in K)$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad f_i = \begin{pmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in} \end{pmatrix} \quad V \simeq K^n\text{-ben}$$

$$\longrightarrow \quad x = P + \sum \lambda_i f_i = \begin{pmatrix} p_1 + \sum \lambda_i f_{i1} \\ p_2 + \sum \lambda_i f_{i2} \\ \vdots \\ p_n + \sum \lambda_i f_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$r((f_{ij})) = d \longrightarrow d \times n$-es mátrixszal paraméterezhető.

Hipersík esete: $\dim V = n$, $\dim \mathcal{A} = n-1$.

$A = p + \mathcal{A}$, $d = n-1$.

$f_1, \dots, f_{n-1} \in V \simeq K^n$ $\quad \exists N \in V: \langle N, f_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ egyenletrendszer, megoldható

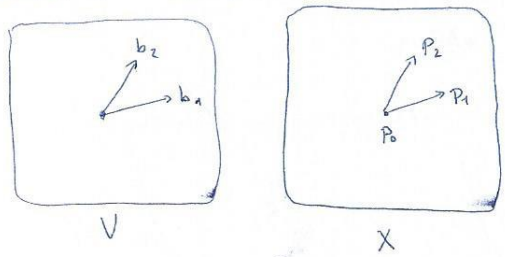
$x = p + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i \quad \forall x \in A$-ra

$\langle x, N \rangle = \langle x, p \rangle + \sum \lambda_i \underbrace{\langle f_i, N \rangle}_{0} \implies$ a hipersík egyenlete $\boxed{\langle x, N \rangle = b}$,

$\sum x_i N_i = b$.

Affin bázis, affin koordináták

Def: V vektortér, $b_1, \dots, b_n$ bázis, X affin tér, $P_0 \in X$



$P_i = b_i * P_0 = P_0 + b_i$

Ekkor $P_1, \dots, P_n$ affin bázis.

$x \in X$ felírása az affin bázisban:

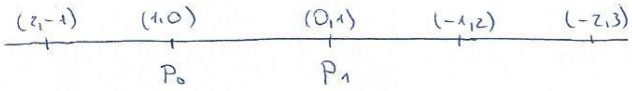
$X = P_0 + V \Rightarrow$

$$x = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) P_0 =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}_{=:\lambda_0} P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i . \quad \text{Ekkor } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Ezek a $(P_0, \dots, P_n)$ aff. bázishoz rendelt $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ affin koordináták.

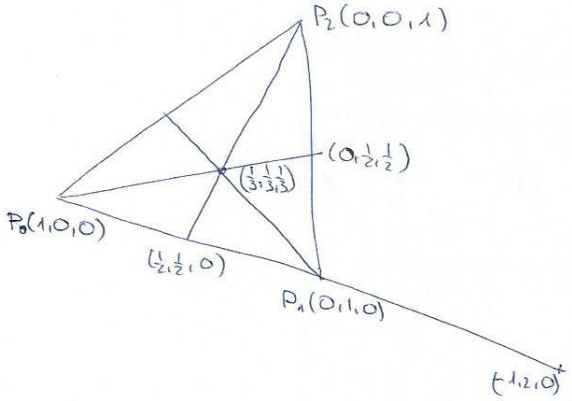
Példa: $\mathbb{R}$



P_0: $x = P_0 + \lambda_1 b_1 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow x = P_0 \longrightarrow P_0 = (1,0)$

P_1: $P_1 = P_0 + \lambda_1 P_1 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_0 = 0 \rightarrow P_1 = (0,1)$

„Felezőpont": $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

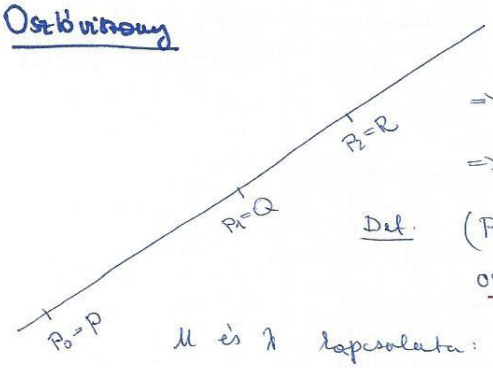


„súlypont": $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$

Δ belseje: $x = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

$\sum \lambda_i = 1, \quad \forall \lambda_i \geq 0.$

Osztóviszony



$R = P_0 + \lambda b_1 = P_0 + \lambda \overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow$ R koordinátái (P_0, P_1)-ben $(1-\lambda, \lambda)$

$\Rightarrow$ R helyette P-nek és Q-nak viszonyítva:

Def. $(PQR) = \mu$, ha $\overrightarrow{RP} = \mu \overrightarrow{RQ}$ $\quad (R \neq Q)$

osztóviszony

μ és λ kapcsolata: $\overrightarrow{RP} = \mu \overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{PR} = \mu \overrightarrow{QR}$

$\lambda \overrightarrow{PQ} = \mu(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}) = \mu(\lambda \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ})$

$\Rightarrow \lambda = \mu(\lambda - 1) \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$

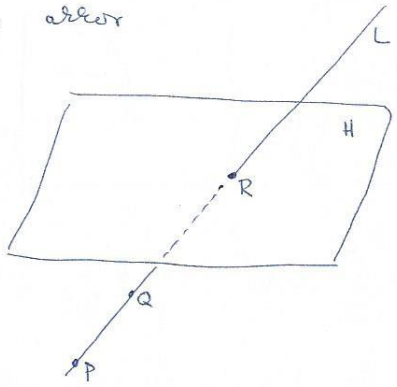
($\lambda = 1$ $R \neq Q$ miatt kizárva már a definícióban)

Thalesz 0. tétele

Legyen H affin hipersík, $h(x) = \langle x, N\rangle + b$. H egyenlete: $H: \{h(x)=0\}$.

Ekkor ha L affin egyenes, $R \in H \cap L$; $P, Q \in L$, akkor

$$(PQR) = \frac{h(P)}{h(Q)}$$



Biz: $\overrightarrow{RP} = \mu \overrightarrow{RQ}$, ahol $\mu = (PQR)$

$$x_P - x_R = \mu(x_Q - x_R)$$

$$\langle N, x_P - x_R\rangle = \mu \langle N, x_Q - x_R\rangle$$

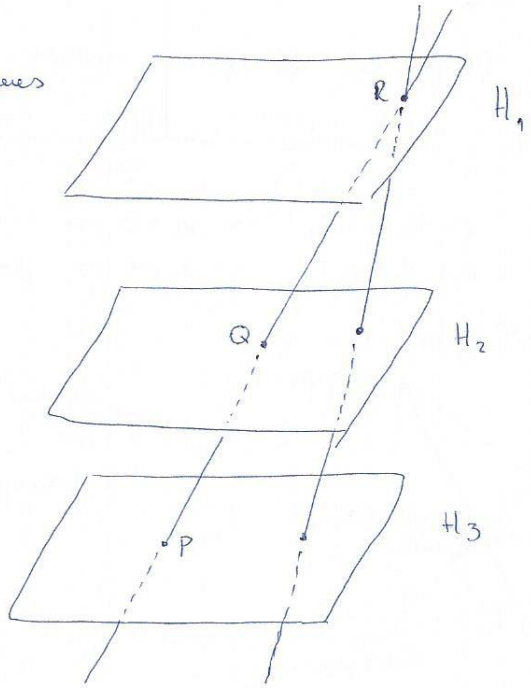
$$h(x_P) - \underbrace{h(x_R)}_{0} = \mu\left(h(x_Q) - \underbrace{h(x_R)}_{0}\right) \Rightarrow \mu = \frac{h(x_P)}{h(x_Q)}$$

□

Thalesz 1. tétele

Legyenek H_1, H_2, H_3 affin hipersíkok, L aff. egyenes

$H_1 \parallel H_2 \parallel H_3$, $P \in L \cap H_3$, $Q \in L \cap H_2$, $R \in L \cap H_1$



Megj.: Ha H_1, H_2 aff. hs., $H_1 \parallel H_2 \longrightarrow H_1 = P_1 + \mathcal{A}$, $H_2 = P_2 + \mathcal{B}$,

$\left.\begin{array}{l}\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} = n-1 \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}, \text{ mert } \parallel\end{array}\right\} \longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Ha $f_1, \dots, f_{n-1}$ bázis $\mathcal{A}$-ban:

$\langle N, f_i\rangle = 0$ jó H_1-re és H_2-re is.

$\Rightarrow$ $H_1 = \langle N, x\rangle = \langle N, P_1\rangle = b_1$

$H_2 = \langle N, x\rangle = \langle N, P_2\rangle = b_2$.

$H_i: \langle N, x\rangle + b_i = 0$, $h_i(x) = \langle N, x\rangle + b_i$

Ekkor (PQR) független L-től.

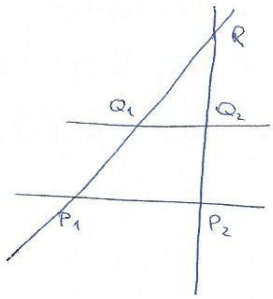
Biz:

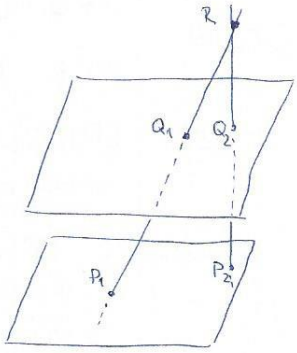
Th. 0: $$(PQR) = \frac{h_1(P)}{h_1(Q)} = \frac{h_3(P) + b_1 - b_3}{h_2(Q) + b_1 - b_2} = \frac{0 + b_1 - b_3}{0 + b_1 - b_2} = \text{konstans, csak } H_1, H_2, H_3\text{-tól függ.}$$ □

Thalesz 2. tétele

$$(P_1 Q_1 R) = (P_2 Q_2 R)$$

Biz: Th. 1.

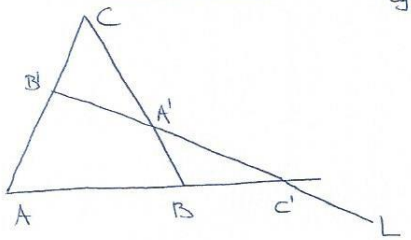




□

Menelaosz tétele

$$\prod_{\text{cykl}} (A\,B\,C') = 1$$



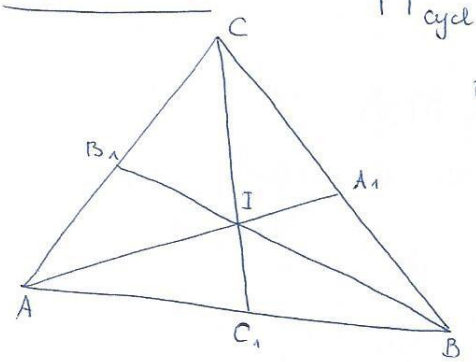
Biz: $L: h(x) = 0$

Th. 0: $$\left.\begin{array}{l}(ABC') = \dfrac{h(A)}{h(B)} \\ (BCA') = \dfrac{h(B)}{h(C)} \\ (CAB') = \dfrac{h(C)}{h(B)}\end{array}\right\} 1$$

□

Ceva tétele

$$\prod_{cycl} (ABC_1) = -1$$



Biz: AA_1: $a(x)=0$ $\quad I+\lambda v_1$ $\quad v_1 = \overrightarrow{AA_1}$

BB_1: $b(x)=0$ $\quad I+\lambda v_2$ $\quad v_2 = \overrightarrow{BB_1}$

CC_1: $c(x)=0$ $\quad I+\lambda v_3$ $\quad v_3 = \overrightarrow{CC_1}$

$$(ABC_1) = \frac{c(A)}{c(B)}$$

$$(BCA_1) = \frac{a(B)}{a(C)} \qquad (CAB_1) = \frac{b(C)}{b(A)}$$

$v_1, v_2, v_3 \in V$, $\dim V = 2$ $\longrightarrow$ $\exists \alpha, \beta$: $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow c(x) = \alpha a(x) + \beta b(x)$

$$K = \frac{a(B)}{a(C)} \cdot \frac{b(C)}{b(A)} \cdot \frac{c(A)}{c(B)} = \frac{a(B)}{a(C)} \cdot \frac{b(C)}{b(A)} \cdot \frac{\alpha \overbrace{a(A)}^{0} + \beta b(A)}{\alpha a(B) + \beta \underbrace{b(B)}_{0}} = \frac{b(C)}{a(C)} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

$$c(C) = 0 \Rightarrow \alpha a(C) + \beta b(C) = 0 \Rightarrow \frac{b(C)}{a(C)} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = -1.$$

$\square$

Definíció. Legyen V vektortér K felett, X V-tartor, $S \subset X$ halmaz.
Ekkor S affin burka a legszűkebb affin altér, ami tartalmazza S-et.
Jelölés: $\mathrm{Aff}(S)$

Állítás: $\mathrm{Aff}(S) = \left\{ P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \ : \ P_i \in S \quad \sum \lambda_i = 1 \right\}$

Affin transzformációk

Definíció. Legyenek V és W K-vektorterek, X V-tartor, Y W-tartor. Ekkor $X \to Y$ affin leképezés,

$$\begin{cases} f: X \to Y \\ \varphi: V \to W \end{cases} \quad K\text{-lineáris vektortér-leképezés}$$

Ha $\varphi\ V \to V$ izomorfizmus / automorfizmus $\xrightarrow[(X=Y,\ V=W)]{}$ f affin auto/izomorfizmus.

Ha $\varphi \in \mathrm{End}(V)$: f affin endomorfizmus.

Megjegyzés: ha f izomorfizmus $\to$ f bijektív:

$$\begin{array}{ccc} f(P+v) & = & f(P+w) \\ \| & & \| \\ f(P)+\varphi(v) & & f(P)+\varphi(w) \end{array}$$

Tartorról van szó, így $\varphi(v) = \varphi(w) \Rightarrow v = w$.

Ha $n = \dim V$: $\mathrm{Aut}(X,V) = \mathrm{Aut}(n) = \{ (f,\varphi) : X \to X$ affin transf.$\}$

$\mathrm{Aut}(X,V)$ csoport: $\quad X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$

$\qquad V \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V$

Zárt a szorzásra: $\big((g,\psi)\circ(f,\varphi)\big)(P+v) = g\big(\underset{\in X}{f(P)} + \underset{\in V}{\varphi(v)}\big) = g(f(P)) + \psi(\varphi(v))$ ✓

Asszociatív ✓

$\exists$ inverz: f bij $\Rightarrow \exists f^{-1}$; $\varphi \in GL(n) \Rightarrow \exists \varphi^{-1}$ $(\det \varphi \neq 0)$ $\to (f,\varphi)^{-1} = (f^{-1}, \varphi^{-1})$

$f(f^{-1}(P+v)) = f(f^{-1}(P) + \varphi^{-1}(v)) = P + v$ ✓

Def. $\mathrm{Elt}(X,V) = \{ (f,\varphi) : \varphi = \mathrm{id}_V \} \subset \mathrm{Aut}(X,V)$ <u>eltolás</u>

$\mathrm{Elt}(X,V) \lhd \mathrm{Aut}(X,V)$ ($\hookrightarrow$ triv.)

$$f(P+v) = f(P) + \varphi(v) = f(P) + v = P + \overrightarrow{Pf(P)} + v = (P+v) + \overrightarrow{Pf(P)}$$

$$\to \quad f(x) = x + \underbrace{\overrightarrow{Pf(P)}}_{\text{állandó}} \quad \Rightarrow \left[(f, \mathrm{id}) \text{ eltolás} \iff \exists w \in V : f(x) = x + w \right]$$

Megj. Elt kommutatív csoport, Aut nem.

V vektorai megfeleltethetők a velük való eltolásnak:

$$(V,+) \longrightarrow \mathrm{Elt}(X,V)$$
$$w \longrightarrow f_w : f_w(x) = x + w$$

Def. „<u>Felejtőleképezés</u>" $\mathrm{Aut}(X,V) \xrightarrow{F} \mathrm{Aut}(V)$

$$(f,\varphi) \xrightarrow{F} \varphi$$

Az affin trafókhoz az „irányítót" rendeli.

F szürjektív csoportmorfizmus.

Következmény. $\mathrm{Ker}\, F = \mathrm{Elt}(X,V)$

$$\Rightarrow \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Elt}(X,V) \xrightarrow{\lhd} \mathrm{Aut}(X,V) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(V) = \frac{\mathrm{Aut}(X,V)}{\mathrm{Elt}(X,V)}$$

$$(V,+) \xrightarrow{\lhd} \mathrm{Aut}(X,V) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(V)$$

Modell n dimenziós affin térre (az „$x_{n+1} = 1$" - modell)

Legyen $\dim V = n$.

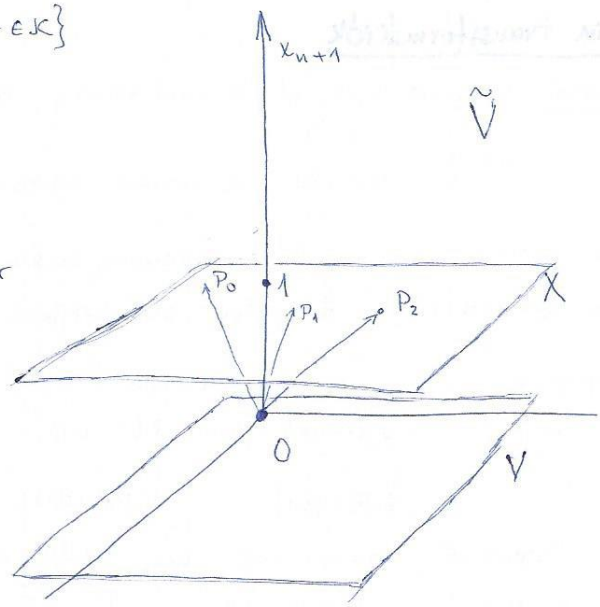
$\tilde{V} = K^{n+1}$, K feletti vt. $\longrightarrow \tilde{V} = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \in K \}$

$V = \{ \tilde{x} \in \tilde{V} \mid \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \}$

$X = \{ \tilde{x} \in \tilde{V} \mid \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 1) \}$

$$V \times X \longrightarrow X$$
$$v * x \longrightarrow v + x$$
$$(v_1, \dots, v_n, 0) * (x_1, \dots, x_n, 1) \longrightarrow (v_1 + x_1, \dots, v_n + x_n, 1)$$

X V-torzor



Legyen $P_0, \dots, P_n \in X$ bázis $\tilde{V}$-ban.

Áll. $P_0, \dots, P_n \in X$ bázis $\tilde{V}$-ban $\iff$ $P_0, \dots, P_n$ affin bázis

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i \in X \iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ affin koordinátái

$\mathrm{Aut}(V) = GL(n, K)$

$\mathrm{Aut}(\tilde{V}) = GL(n+1, K) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & c_0 \end{array}\right)^{n}_{1}$ (n, 1)

Kerssük Aut $\tilde{V}$ azon elemeit, amik megőrzik X-et.

$$\forall x : \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & c_0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} ? \\ 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c} Ax + b \\ \langle c, x \rangle + c_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} ? \\ 1 \end{array}\right) \Rightarrow \langle c, x \rangle + c_0 = 1 \overset{\forall x}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} c = 0 \\ c_0 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Aut}\, X = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \right\}}$$

Spec.: Elt X-re $A = I \longrightarrow \mathrm{Elt}(X) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Itt $A \longleftrightarrow \varphi$ megfeleltetés.

Felejtés: $\mathrm{Aut}\, X \longrightarrow \mathrm{Aut}\, V$

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F} A}$$

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & Ab'+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{valóban csoport } \mathrm{Aut}\, X$$

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$ nem kommutatív, és nem csak $AA' \neq A'A$ miatt, hanem b és b' is bejön.

Kollinearitás

Definíció. Legyen V K-vektortér, X V-tartor, $f: X \to X$ leképezés.
f megőrzi a kollinearitást, ha $\forall\, P, Q, R \in L \subset X$ kollineáris ponthármasra $f(P), f(Q), f(R) \in X$ is kollineáris.

Állítás. $(f, \varphi) \in \mathrm{Aut}\,(X, V) \Rightarrow f$ megőrzi a kollinearitást

Biz: Legyen v L irányvektora $\longrightarrow Q = P + \alpha v$, $R = P + \beta v$.

$$f: \left.\begin{aligned} P &\to f(P) \\ Q &\to f(Q) = f(P + \alpha v) = f(P) + \varphi(\alpha v) = f(P) + \alpha\varphi(v) \\ R &\to f(R) = f(P) + \beta\varphi(v) \end{aligned}\right\} \varphi(v) \text{ irányvektorú egyenesen.}$$

□

Kérdés: f megőrzi a kollinearitást $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ f affin transzformáció.

$n = 1 \longrightarrow X = K$, bármi lineáris, de nem minden transf. affin. $\longrightarrow$ nem igaz.

Affin geometria főtétele: Ha $K = \mathbb{R}$, $n \geq 2$, akkor f megőrzi a koll. $\Leftrightarrow$ f affin transf.

Megjegyzés: Legyen $K = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^2$, $f((z_1, z_2)) = (\overline{z_1}, \overline{z_2})$,
$L: az_1 + bz_2 = c$ ahol $a, b, c \in \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
$\longrightarrow L': \bar{a}\overline{z_1} + \bar{b}\overline{z_2} = \bar{c} \longrightarrow (\overline{z_1}, \overline{z_2}) \in \{\bar{a} w_1 + \bar{b} w_2 = \bar{c}\}$

Egyenest egyenesbe vitt, de φ nem $\mathbb{C}$-lineáris (és így f nem affin):
$v \in \mathbb{C}^2$: $\varphi(\lambda v) = \overline{\lambda} \cdot \overline{v} \neq \lambda\overline{v} = \lambda\varphi(v)$. (Itt nem $K = \mathbb{R}$ volt!)

Bővítsüz/
Javítsuk ki! Legyen K test, $\mathrm{Aut}\,(K) = \{\sigma: K \to K \mid \sigma \text{ testizomorfizmus}\}$ automorfizmus csoport

$(K, +, 0) \longrightarrow \sigma(0) = 0$ $\quad$ σ additív K-n
$(K \setminus 0, \cdot, 1) \longrightarrow \sigma(1) = 1$ $\quad$ σ multiplikatív $K \setminus 0$-n.

Példa: $\sigma(x) = x$, $\mathrm{id}: K \to K$ automorfizmus.
Ha $K = \mathbb{C} \longrightarrow \sigma(z) = \overline{z}$ automorfizmus.
Megmutatható: $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{R}) = \mathrm{id}$, $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}) = \{\mathrm{id}, \text{konjugálás}\}$

Definíció. Legyen V K-vektortér, $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(K)$. Ekkor $\varphi: V \to V$ σ-szemilineáris leképezés, ha
$\varphi(0) = 0$,
$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
$\varphi(\lambda v) = \sigma(\lambda)\varphi(v)$.

Definíció. Legyen X V-tartor K felett, ekkor $(f, \varphi): X \to V$ szemiaffin leképezés, ha $\exists\, \sigma \in \mathrm{Aut}(K)$, amire φ σ-szemilineáris.

Tétel (általánosabban): f megőrzi a kollinearitást $\Leftrightarrow$ f szemiaffin leképezés.

VIII. Affin euklideszi terek

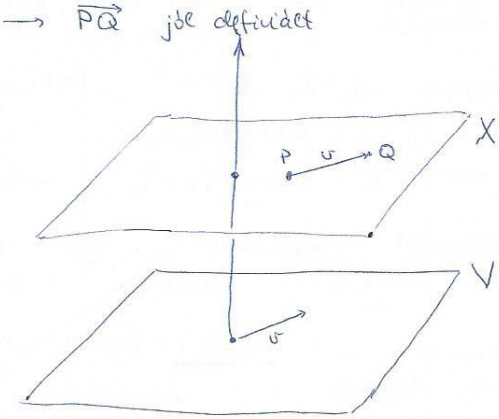
	K feletti vektortér	K feletti (X,V) affin tér	
Algebrai struktúra	$\dim_K V = n$ $(b_1,\dots,b_n)$ bázis, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ koordináták $\mathrm{Aut}(V) = GL(n,K)$ Ha $K=\mathbb{R} \to$ van irányítás (előjel) $\to \mathrm{Aut}^+(V) = GL^+(n,K)$	$\dim X = n$ $(P_0,\dots,P_n)$ aff. bázis, $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ aff. koord. $\sum \lambda_i = 1$ $(V,+) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(X,V) \to GL(n,K)$	
Metrikával ellátva	Lineáris euklideszi tér $K=\mathbb{R}$ $\langle , \rangle$ skalárszorzat $\mathrm{Aut}(V,\langle,\rangle) = O(n)$ $\mathrm{Aut}^+(V,\langle,\rangle) = SO(n)$	Affin euklideszi tér $\mathrm{Elt}(n) \to \mathrm{Aut}(X,V,\langle,\rangle) \xrightarrow{F} O(n)$	

<u>Definíció</u>: $K=\mathbb{R}$, V lineáris euklideszi tér, akkor X affin euklideszi tér, ha X $(V,\langle,\rangle)$ feletti torzor.

$Q = P+v \to \overrightarrow{PQ} - v \in V$ $(P,Q \in X)$

$v \in (V,\langle,\rangle) \to |v|$ definiált. $P,Q \in X \to \overrightarrow{PQ}$ jól definiált

$\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ is értelmezett



$\mathrm{Elt}(n) \to \mathrm{Aut}(X,V,\langle,\rangle) \xrightarrow[F]{\text{felejtő}} O(n)$

$\cup$

(f,φ): $\varphi \in \mathrm{Aut}(V,\langle,\rangle)$

$\varphi \in O(n)$

$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(X,V,\langle,\rangle)$, ahol $A \in O(n)$

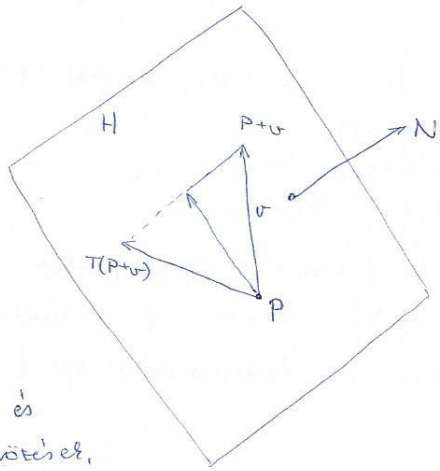
Ha f őrzi az irányítást: $A \in SO(n)$.

Felix Klein: egy tér leírásában a transzformációcsoportnak a lényegesek, nem a tér magában.

<u>Példa</u>: tükrözés.

H: $\langle N,x\rangle + b = 0$, $P \in H$.

$T_H(P+v) = f(P) + \varphi(v) = P - \dfrac{2\langle v,N\rangle}{\langle N,N\rangle} \cdot N$



[Emlék: Cartan-tétel euklideszi lin. térben:
$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(V,\langle,\rangle) = O(n)$ $\exists T_1,\dots,T_k$, $k \le n$ lineáris tükrözések, hogy $\varphi = T_1 \circ \dots \circ T_k$.]

<u>Cartan-tétel affinatétne</u>: Ha $(X,V,\langle,\rangle)$ aff. eu. tér és $(f,\varphi) \in \mathrm{Aut}(X,V,\langle,\rangle)$, akkor $\exists T_1,\dots,T_k$, $k \le n+1$ tükrözések, hogy $f = T_1 \circ \dots \circ T_k$.

Megj: Ha f tartja az irányítást, k páros, különben páratlan.

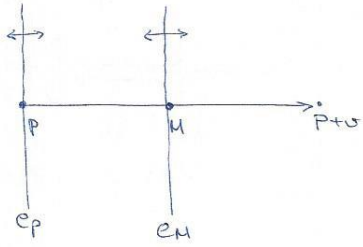
Biz: $P \xrightarrow{f} f(P)$. $\exists T_0: f(P) \to P$. $\Rightarrow T_0 \circ f: P \to P$ (valamely P-re).

$\to$ az már sima eukl. traf., mert P fixpont (origó). Cartan $T_0 \circ f$-re $\to k \le n$.

T_0-val együtt legfeljebb $n+1$. ✓ $\square$

Példa. $\mathbb{R}^2$-ben $f(x) = x + v \in \mathrm{Aut}^+$ $\qquad v \in (\mathbb{R}^2, +)$

$f = T_{e_M} \circ T_{e_P}$



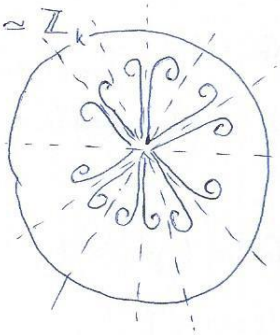
Szimmetriacsoportok

Forgatások csoportja: $SO(2) = S^1 = (R_\alpha)_{\alpha \in S^1}$

$G \subset SO(2)$, $|G| < \infty \longrightarrow$ pl. $G = \langle R_{\frac{2\pi}{4}} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, $G = \langle R_{\frac{2\pi}{k}} \rangle \simeq \mathbb{Z}_k$

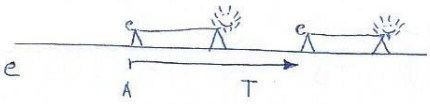
Leonardo da Vinci tétele: Ha $G \subset SO(2)$, G véges $\Longrightarrow G = \langle R_{\frac{2\pi}{k}} \rangle$.

Ha $G \subset O(2) \longrightarrow$ pl. $G = D_6 = \langle R_{\frac{2\pi}{6}}, T_{\frac{2\pi}{6}} \rangle \xrightarrow{\text{pl.}}$



Egyenesek mentén szimmetriacsoport (e invariáns a trafóra)

Pl.

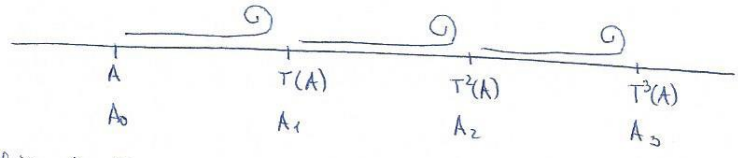


T eltolás

T (kép) = kép

T a legrövidebb eltolás ezzel a tulajdonsággal.

1. eset. $G_1 = \langle T \rangle \simeq \mathbb{Z}$



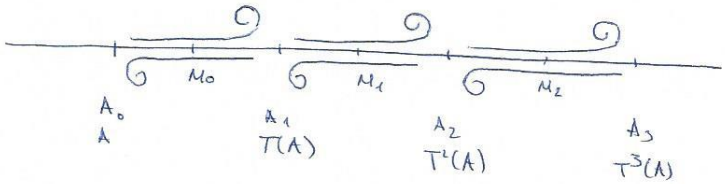
Eltolásra szimmetrikus, de semmi más affin trafóra nem.

2. eset. $G_2 = \langle T, R_{A_0} \rangle = \langle (T^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (R_{A_n})_{n \in \mathbb{Z}}, (R_{M_n})_{n \in \mathbb{Z}} \rangle$

$T R_{A_0} = R_{M_0}$

R_{A_0}, R_{M_0} is generálja G-t.

($G \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ szabadszorzat)



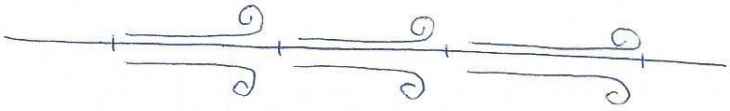
Állítás. G-ben nincs tükrözés ($\forall$ elem irányítástartó) $\Longrightarrow G = G_1$ vagy $G = G_2$.

3. eset. $G_1' = \langle T, S_e \rangle$

$T \circ S_e = S_e \circ T \longrightarrow$ komm.

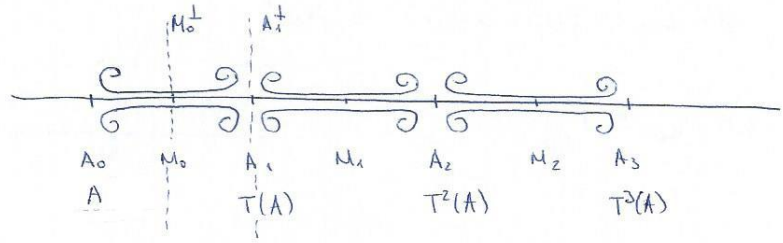
$S_e^2 = id$

$G_1' \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



4. eset. $G_2^1 = \langle T, R_A, S_e \rangle =$

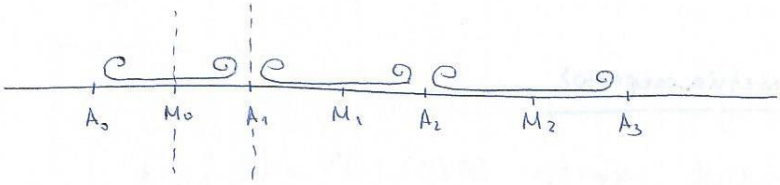
$= \langle T, R_A, S_e, S_{A_n^\perp}, S_{M_n^\perp} \rangle$



5. eset. $G_1^2 = \langle T, S_{A_0^\perp} \rangle$

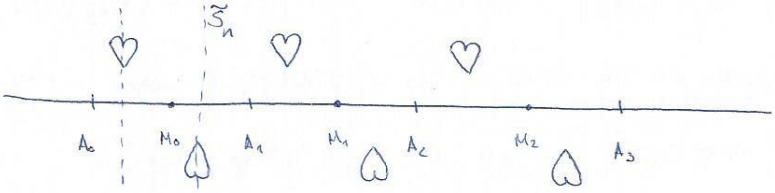
$T^n, S_{A_n^\perp}, S_{M_n^\perp} \in G_1^2$

$G_1^2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 2 tükrözés generálja $(S_{A_n^\perp}, S_{M_n^\perp})$



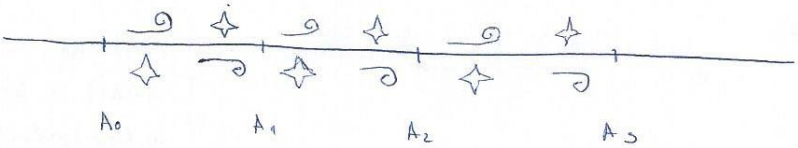
6. eset. $G_2^2 = \langle T_n, R_{A_n}, R_{M_n}, \tilde{S}_n, \gamma \rangle$

$\gamma =$ fél eltolás $+ S_e$



7. eset. $G_1^3 = \langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}$

$\gamma \circ \gamma = T$



Ezek csak az egyenestartó. Az n dimenziós tér transzformációcsoportja igen gazdag.

Konvexitás

Legyen $K = \mathbb{R}$, V $\mathbb{R}$-vektortér, X V-tartor, $\dim X = n$.

$b_1, \dots, b_r \in V$; $p_0 \in X \longrightarrow p_i = p_0 + b_i$ $(i = 1, \dots, r)$

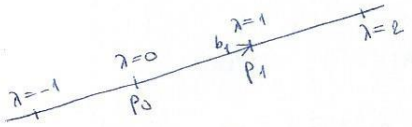
Emlék:

$$q = p_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = p_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p_0 p_i} = \underbrace{\left(1 - \sum_1^r \lambda_i\right)}_{\lambda_0} p_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i ,$$

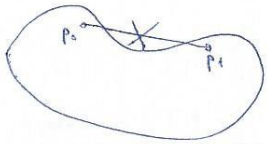
ahol $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Def. $p_0, p_1 \in X$, $\overrightarrow{p_0 p_1} = b_1$. Ekkor a $p_0 p_1$ <u>affin egyenes</u> $\{(1-\lambda) p_0 + \lambda p_1\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$,

a $p_0 p_1$ <u>affin szakasz</u> $\{(1-\lambda) p_0 + \lambda p_1\}_{\lambda \in [0,1]} = [p_0, p_1]$



Def. $A \subset X$. A <u>konvex</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall p_0, p_1 \in A \Longrightarrow [p_0, p_1] \in A \right)$

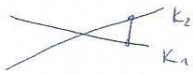


Példák: 1) $A = X$ a tér maga triv

2) féltér: $\{ p = (x_1, \dots, x_n) : \sum x_i a_i \le b \} \longrightarrow$ affin kombinációjuk $\le (1-\lambda) b + \lambda b \le b$

3) $(K_i)_{i \in I}$ konvex $\Rightarrow \bigcap K_i$ konvex

4) K_1, K_2 kx. $\not\Rightarrow$ $K_1 \cup K_2$ kx.



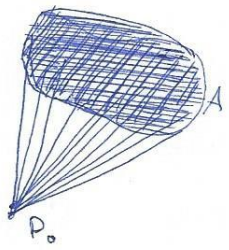
5) $f : X_1 \longrightarrow X_2$ aff. leképz.

$A_1 \subset X_1$ kx. $\longrightarrow f(A_1) \subset X_2$ kx. mert f lineáris

6) $A_i \subset X_i$, $i \in I$ konvex $\Rightarrow \prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} X_i$ konvex, mert koordinátánként.

7) Kúp: $A \subset X$ sz., $p_0 \in X$ rögzített

$\Rightarrow \bigcup_{p_i \in A} [p_0, p_i] \subset X$ sz.



8) Golyó $\mathbb{R}^n$-ben (euk. aff. tér)

$\{x : |x-p_0| \le r\}$ zárt

$\{x : |x-p_0| \lneq r\}$ nyílt

9) $X = M_n(\mathbb{R})$, $A = \{M \in X,\ M$ negatív definit$\}$. konvex: negatív definitek affin kombinációja neg. def.

10) $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ konkáv

Pl. $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac14&\frac14\\-\frac14&\frac14\end{pmatrix}$

Def. $p_0, \dots, p_r \in X$, $q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i$, $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0$ $\longrightarrow$ $p_0, \dots, p_r$ konvex kombinációja

Tétel. $A \subset X$, A konvex $\iff \left(\forall p_0, \dots, p_r \in A: \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i \in A,\ \text{ahol } \sum \lambda_i = 1 \text{ és } \lambda_i \ge 0\right)$.

B: $\Leftarrow$: triv, $r=1$-re a konvexitás definíciója

$\Rightarrow$: teljes indukció r szerint: $r=0$-ra üres,

$r=1$-re definíció miatt igaz.

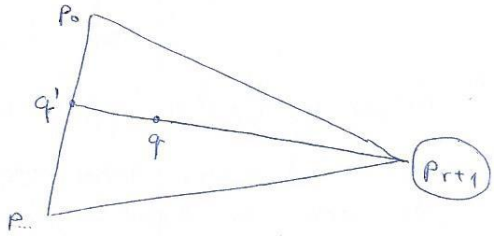
$r \longrightarrow r+1$. Legyen $q = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda_i p_i$, és tfh. $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \ne 0$ (különben triv).

Keressük meg q'-t.

$$\sum_{i=0}^{r+1} \lambda_i p_i = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i + \lambda_{r+1} p_{r+1} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{r} \lambda_j\right) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^{r} \lambda_j} p_i}_{} + \lambda_{r+1} p_{r+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \cdot \underset{\in A'}{q'} + \lambda_{r+1} p_{r+1} \longrightarrow \text{def. szerint} \checkmark$$



$\square$

Def. $A \subset X$ tetsz. halmaz. $\overline{A}$ az A konvex burka: a legkisebb konvex halmaz X-ben, ami tartalmazza A-t.

Pl. 1)  $\mathbb{R}$ $\quad \overline{\{p_0\}} = \{p_0\}$

2)  $\mathbb{R}$ $\quad \overline{\{p_0, p_1\}} = [p_0, p_1]$

Állítás. $\overline{A} = \bigcap_{\substack{K \text{ konvex} \\ A \subset K \subset X}} K$

B: tautologikus a definíció szerint: mivel $\overline{A}$ is ilyen K, így $\bigcap K \subset \overline{A}$

$\overline{A} \subset K$, $\overline{A} = \bigcap K$ $\longrightarrow$ $\bigcap K \supset \overline{A}$ $\Big\}$ $\overline{A} = \bigcap K$

$\square$

Megjegyzés. Ha A konvex, $\overline{A} = A$. Speciálisan $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Def. $A \subset X$ halmaz. $\tilde{A} := \left\{ q : q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i, \quad p_i \in A, \ \sum \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \right\}$

Állítás. $\tilde{A} = \overline{A}$.

B: 1. lépés: $\tilde{A}$ konvex halmaz.

Legyen $q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i \qquad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$

$q' = \sum_{i=0}^{s} \mu_j p_j' \qquad \sum \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0$

$\rightarrow [q; q']: \quad tq + (1-t) q' = \sum_{i=0}^{r} t \lambda_i p_i + \sum_{j=0}^{s} (1-t) \mu_j p_j' \qquad t \in [0,1]$

$t\lambda_i \geq 0, \quad (1-t)\mu_j \geq 0, \quad \sum t\lambda_i + \sum (1-t)\mu_j = 1$

$\Rightarrow \quad tq + (1-t) q' \in \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A}$ konvex.

2. lépés: $\tilde{A} \supset A$ triviálisan.

Tehát $\tilde{A}$ konvex és tartalmazza A-t $\rightarrow \tilde{A} \supset \overline{A}$.

3. lépés. $q \in \tilde{A} \overset{?}{\rightarrow} q \in \overline{A}$.

$q = \sum \lambda_i p_i, \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad p_i \in A \subset \overline{A}$

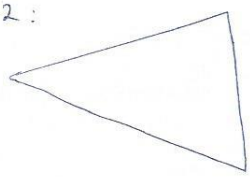
A konvexitással ekvivalenciát kifejező korábbi tétel szerint ekkor $q = \sum \lambda_i p_i \in \overline{A}$ ✓ □

Tétel. (Carathéodory) Legyen $A \subset X$ halmaz, ekkor

$\overline{A} = \left\{ q : q = \sum_{i=0}^{n'} \lambda_i p_i, \quad \sum \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \right\}$, ahol $n' \leq n (= \dim X)$

Azaz elegendő legfeljebb $\dim X$ hosszú összegeket nézni.

Példa. $n = 2$:



A háromszögben 2 tag csak az oldalakat adná ki, de 3 tag már a belsejét is $\rightarrow$ itt 3 tag elég (és kell is).

Biz. Legyen $q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i, \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad p_i \in A$.

Ha most $r \leq n$, kész vagyunk.

Ha $r > n$, ki fogjuk cserélni egy rövidebb kombinációra.

$q = p_0 + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p_0 p_i}$ (V-ben)

$\overrightarrow{p_0 q} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p_0 p_i}$

$\overrightarrow{p_0 q} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\overrightarrow{p_0 q} + \overrightarrow{q p_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right) \overrightarrow{p_0 q} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{q p_i}$

$0 = \underbrace{\left(-1 + \sum_{1 \leq i} \lambda_i \right)}_{-\lambda_0} \overrightarrow{p_0 q} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{q p_i}$

$0 = \sum_{i \geq 0} \overrightarrow{q p_i} \lambda_i$

$\dim X = \dim V = n$

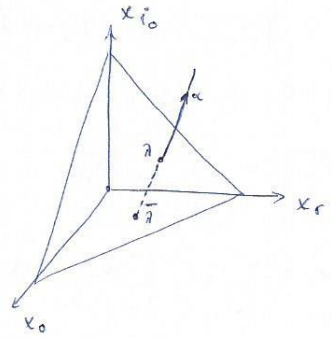
$\{\overrightarrow{q p_i}\}_{i=0}^{r}$: $r+1$ db vektor V-ben

$r > n \Rightarrow r+1 \geq n+2 \Rightarrow$ van legalább 2 lin. öf. köztük

$\Rightarrow \exists \alpha_0, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, nem mind 0

$r \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = 2$ és $\sum_{i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{q p_i} = 0$

Vesszük a λ-ból az α irányvektorú egyenest, et valahol valamelyik kipersiot dönti, amit a tengelyek feszítenek ki. $\longrightarrow$ $\overline{\lambda}$, ennek az egyik koordinátája 0. : $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_0, \dots, \overline{\lambda}_n)$, $\exists i_0 : \overline{\lambda}_{i_0} = 0$; $\overline{\lambda}_{j_0} \geq 0$.



$\overline{\lambda} = t\alpha + \lambda$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=0}^{r} \overline{\lambda}_i \overrightarrow{qp_i} = 0$$

Mivel független α és λ, $\exists j_0 : \overline{\lambda}_{j_0} \neq 0$. $\Rightarrow$ az összegük pozitív

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{r} \underbrace{\frac{\overline{\lambda}_i}{\sum_{j=0}^{r} \overline{\lambda}_j}}_{\mu_i} \overrightarrow{qp_i} = 0 \longrightarrow \sum \mu_i = \frac{\sum \overline{\lambda}_i}{\sum \overline{\lambda}_j} = 1, \quad \mu_i \geq 0,$$ legalább eggyel kevesebb koordináta kellett. $\square$

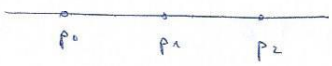
(Egyébként et elvégezhető lett volna tisztán algebrával is.)

<u>Megjegyzés</u>: $A \subset X$ halmaz $\longrightarrow$ $\overline{A} = \left\{ q : q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i, \ \{\overrightarrow{p_0 p_i}\}_{i=0}^{r} \text{ lineárisan független} \right\}$ a Caratheodory következményeképp.

Emlék: $p_0, \dots, p_r$ független X-ben, ha $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_r}$ független V-ben.

<u>Tétel</u>: (Radon) Ha $p_0, \dots, p_r$ lineárisan függő $\Longrightarrow \exists I, J$ halmazok, hogy $\{0, 1, \dots, r\} = I \sqcup J$ és $\overline{\{p_i\}_{i \in I}} \cap \overline{\{p_j\}_{j \in J}} \neq \emptyset$, ahol $\sqcup$ a diszjunkt unió.

Példa: $n = 1$:



$I = \{0, 2\}$
$J = \{1\}$

$n = 2$:

Biz: Legyenek $p_0, \dots, p_r$ lineárisan összefüggő affin pontok.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{p_0 p_i} = 0, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Legyen $O \in X$ (origó). $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\overrightarrow{p_0 O} + \overrightarrow{O p_i}) = 0$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} (-\alpha_i) \right)}_{\alpha_0} \overrightarrow{O p_0} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{O p_i} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_0 \overrightarrow{O p_0} + \dots + \alpha_r \overrightarrow{O p_r} = 0$, ahol $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i = 0$

Legyen $I_0 = \{ i : \alpha_i = 0 \}$

$I_+ = \{ i : \alpha_i > 0 \}$

$I_- = \{ i : \alpha_i < 0 \}$

Ekkor persze $\{0,\dots,r\} = I_0 \sqcup I_+ \sqcup I_-$.

Mivel $\sum \alpha_i = 0$, de $(\alpha_0,\dots,\alpha_r) \neq 0$, van elem I_+-ben és I_--ben is.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{I_+} \alpha_i \overrightarrow{Op_i} = \sum_{I_-} \alpha_i \overrightarrow{Op_i} \\ \text{Legyen } \alpha := \sum_{I_+} \alpha_i = \sum_{I_-} |\alpha_i| \neq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \sum_{I_+} \underbrace{\frac{\alpha_i}{\alpha}}_{\lambda_i} \overrightarrow{Op_i} = \sum_{I_-} \underbrace{\frac{|\alpha_i|}{\alpha}}_{\lambda_i} \overrightarrow{Op_i} \quad (V\text{-ben})$$

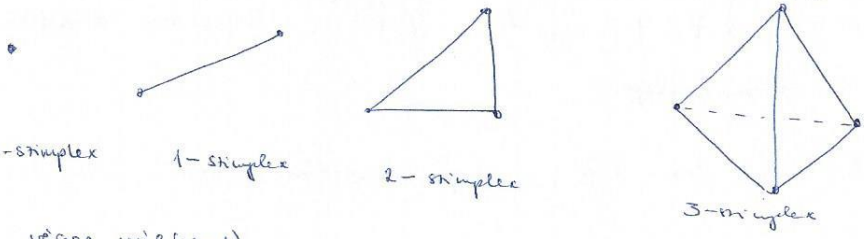
Itt $\sum_{I_+} \lambda_i = \sum_{I_-} \lambda_i = 1$; $\lambda_i \geq 0$ $(\forall i \in I_+ \sqcup I_-)$

Visszatérés X-be:

$$O + \sum_{i\in I_+} \lambda_i \overrightarrow{Op_i} = O + \sum_{i \in I_-} \lambda_i \overrightarrow{Op_i} = Q \implies Q \in \overline{\{p_i\}_{i\in I_+}} \cap \overline{\{p_i\}_{i\in I_-}}.$$

Tehát pl. $I = I_0 \sqcup I_+$ és $J = I_-$ jó választás. $\square$

<u>Definíció</u>. Legyenek $p_0,\dots,p_r$ lineárisan független pontok. Ekkor a $p_0,\dots,p_r$ által kifeszített <u>simplex</u> alatt a $\{q : q = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i,\ \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$ halmazt értjük.

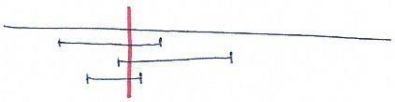


<u>Tétel</u> (Helly, véges változat)

Legyen X affin tér, $\dim X = n$, I véges indexhalmaz, $\{K_i\}_{i\in I}$ konvex halmazok rendszere.

$$\forall J: |J| \leq n+1,\ J \subset I,\ \bigcap_{i\in J} K_i \neq \emptyset \implies \bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$$

Pl. $n=2$



Biz: Indukció $|I|$ szerint.

Ha $|I| \leq n+1$, az állítás triviális.

Legyen most $|I| = n+2$. Adottak $K_0,\dots,K_{n+1}$, melyekre teljesül:

$$\forall i: \bigcap_{j\neq i} K_j \neq \emptyset. \overset{?}{\implies} \bigcap_{\forall j} K_j \neq \emptyset$$

Legyen $P_i \in \bigcap_{j\neq i} K_j$. Ezzel definiáljuk a $P_0,\dots,P_{n+1}$ X-beli pontokat.

$n+2 > 1+n = \dim X + 1 \longrightarrow$ van lineáris öf. köztük.

A Radon-tétel szerint $\exists A,B$: $\{0,\dots,n+1\} = A \sqcup B$, $\overline{\{p_i\}_{i\in A}} \cap \overline{\{p_j\}_{j\in B}} \neq \emptyset$.

Legyen ennek a halmaznak egy eleme Q.

$\forall \ell \notin A$: $\forall i \in I$: $p_i \in K_\ell$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \{p_i\}_{i\in I} \subset K_\ell \implies Q \in K_\ell \ (\forall \ell \notin A) \\ \text{Ugyanez } B\text{-re: } \forall \ell \notin B\ Q \in K_\ell \end{array}\right\} Q \in \bigcap K_j \quad ✓$$

Most végezzük el az indukciót az $|I| \geq n+2$ esetben. Legyen $1+r = |I|$, a halmazok $K_0, \dots, K_r$.

Definiáljuk az $\{L_i\}_{i=0}^{r-1}$ halmazrendszert: $L_i = K_r \cap K_i \quad (i \neq r)$

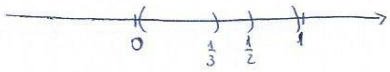
Mivel konvex halmazok metszete konvex, ezzel egy r elemű konvex halmazrendszert kaptunk. Az L_i-k közül a feltétel szerint bármely n metszete nemüres, így az r-re vonatkozó Helly szerint:

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^{r-1} L_i = \left(\bigcap_{i=0}^{r-1} K_i\right) \cap K_r .$$

$\square$

Kérdés: Mi a helyzet ∞ halmazra?

Példák: 1) $\mathbb{R}$-ben $K_i = (0; 1/i)$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots$



$$\bigcap_{\substack{i \in I \\ |I| < \infty}} K_i = \left(0, \frac{1}{\max_{i \in I}(i)}\right) \neq \emptyset, \quad \text{de} \quad \bigcap_{i \geq 1} K_i = \emptyset \quad \longrightarrow \text{nem igaz}$$

2) $X = \mathbb{R}$, $K_i = [i, \infty)$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots$

$$\bigcap_{\substack{i \in I \\ |I| < \infty}} K_i \neq \emptyset, \quad \text{de} \quad \bigcap_{i \geq 1} K_i = \emptyset .$$

Tétel. (Helly, végtelen vektorat). Legyen X affin tér, $\dim X = n$, $\{K_i\}_{i \in I}$ konvex halmaz rendszere,

$\forall i \in I$: K_i zárt,

$\exists i_0 \in I$: K_{i_0} kompakt.

$$\forall J: |J| \leq n+1, \ J \subset I: \bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset \implies \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset .$$

Megjegyzés: topológiai fogalmak.

Legyen $X = \mathbb{R}^n$.

Def. U nyílt X-en, ha $\forall p \in U \ \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(p) = \{x : |x-p| < \varepsilon\} \subset U$.

Def. Z zárt X-en, ha $X \setminus Z$ nyílt.

Def. Z zárt X-en, ha $\{z_n\}_{n \geq 1}$ sorozat, amire $\lim_{n \to \infty} z_n$ létezik és $\lim z_n = z_0 \in X$, akkor $z_0 \in Z$. (Komponenseszerinti határértéke értendő.)

Def. $H \subset X$ korlátos $\iff \exists M > 0$: $H \subset [-M, M]^n$.

Def. $K \subset X$ kompakt $\iff$ K zárt és korlátos.

Borel-tétel. K kompakt $\iff \left(K \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \ U_i \text{ nyílt} \implies \exists J \subset I, |J| < \infty, \ K \subset \bigcup_{i \in J} U_i \right)$

(van végtelen fedés $\Rightarrow$ van véges fedés)

A Helly-tétel BIZONYÍTÁSA:

$\lightning$ $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Ekkor $K_{i_0} \cap \left(\bigcap_{i \neq i_0} K_i\right) = \emptyset \implies K_{i_0} \subset \underbrace{\bigcup_{i \neq i_0} (\mathbb{R}^n - K_i)}_{\infty \text{ fedés}}$

Borel $\longrightarrow \exists J, |J| < \infty, \ J \subset I - \{i_0\}$:

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J} (\mathbb{R}^n - K_i)$$

$\iff K_{i_0} \cap \left(\bigcap_{i \in J} K_i\right) = \emptyset$. Ez viszont ellentmond a véges Helly-tételnek. $\lightning$. $\square$

Def.: Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz.

$$\overline{A}^{top} = \left\{ \lim_{n\to\infty} z_n, \text{ ahol } z_n \in A, \ (z_n) \text{ konvergens sorozat} \right\}$$ az A topológiai lezártja.

Azaz A és a torlódási pontok.

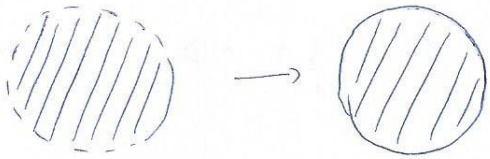
Def.: $\overline{A}^{top}$ a legkisebb olyan zárt halmaz, ami tartalmazza A-t.

Def.: $\overline{A}^{top} = \bigcap_{\substack{Z \text{ zárt} \\ Z \supset A}} Z$

Például:

1)

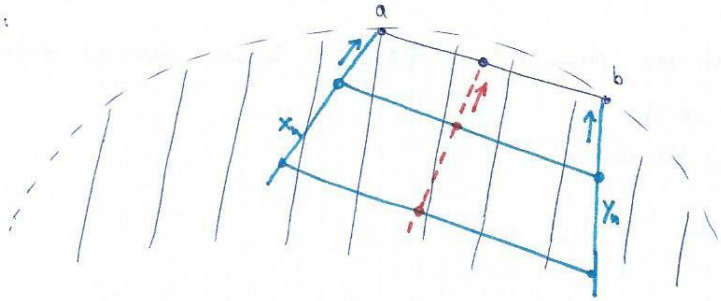
2)



3) $\overline{\mathbb{Q}}^{top} = \mathbb{R}$

Állítás. $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow$ $\overline{K}^{top}$ is konvex.

B:



$a, b \in \overline{K}^{top} \overset{?}{\Rightarrow} ta + (1-t)b \in \overline{K}^{top}$.

$\exists x_n \in K \to \lim x_n = a$ per def.

$\exists y_n \in K \to \lim y_n = b$ per def.

$\Downarrow$

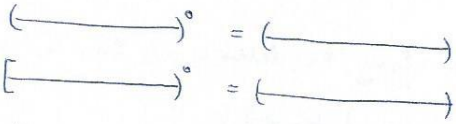
$tx_n + (1-t)y_n \in K$, mert K konvex

$\Downarrow$

$\lim \left[tx_n + (1-t)y_n \right] = ta + (1-t)b$. $\square$

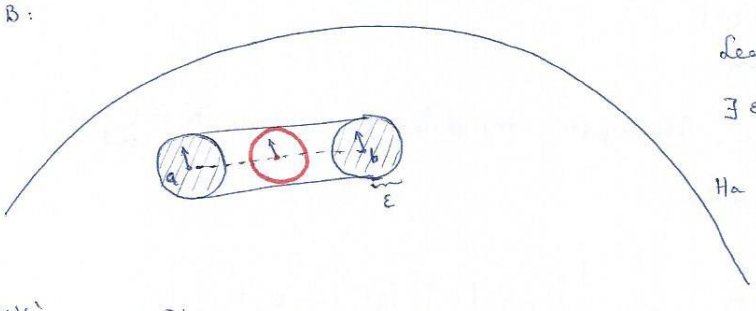
Def. $K \subset \mathbb{R}^n$ belső pontjai: $K^\circ = \{ p \in K : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(p) \in K \}$

Például:



Állítás. $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow$ K° is konvex.

B:



Legyen $a, b \in K^\circ$. $\overset{?}{\Rightarrow} ta + (1-t)b \in K^\circ$.

$\exists \varepsilon > 0$ (közös): $B_\varepsilon(a) \subset K$

$B_\varepsilon(b) \subset K$

Ha $|v| < \varepsilon$:

$$\underbrace{t\underbrace{(a+v)}_{\in K} + (1-t)\underbrace{(b+v)}_{\in K}}_{\in K} = ta + (1-t)b + v \Rightarrow B_\varepsilon(ta + (1-t)b) \subset K$$ $\square$

Állítás. $U \subset \mathbb{R}^n$, U nyílt $\Rightarrow$ $\overline{U}$ nyílt

Állítás. F kompakt $\mathbb{R}^n$-en $\Rightarrow$ $\overline{F}$ kompakt.

Példa. F zárt $\mathbb{R}^n$-ben, de $\overline{F}$ nem feltétlenül zárt

ennek az egyenesnek csak 1 pontja van a lezártban

Elválasztási tételek

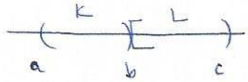
Definíció. $K, L \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $K \cap L = \emptyset$

K és L elválasztható, ha $\exists\, H$ hipersík: $K \subset H_{\geq 0}$ és $L \subset H_{\leq 0}$.

K és L szigorúan elválasztható, ha $\exists H$: $K \subset H_{>0}$ és $L \subset H_{<0}$.

Jelölés. Ha $H = \{x : \ell(x) = b\}$, akkor $H_{\geq 0} = \{x : \ell(x) \geq b\}$ stb.

Példa.



elválasztható, de nem szigorúan

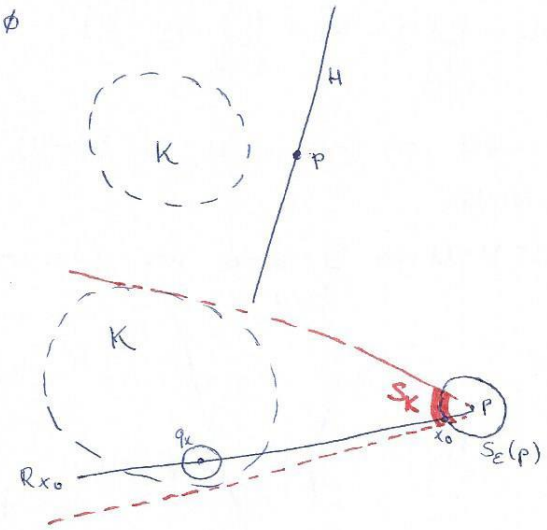
Hahn—Banach-tétel. K konvex nyílt halmaz, $K \subset \mathbb{R}^n$ és

$\exists a$ affin altér, hogy $\dim a < n$, $a \cap K \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists H$ hipersík: $a \subset H$, $H \cap K = \emptyset$

Biz: Először $n = 2$-re bizonyítunk: $K \subset \mathbb{R}^2$, $p \notin K$

$\overset{?}{\Rightarrow} \exists \ell : \ell \ni p$, $\ell \cap K = \emptyset$.



Legyen $S_\varepsilon(p) = \{x : |x - p| = \varepsilon\}$,

R_x félegyenes p-ből x felé,

$S_K = \{x : R_x \cap K \neq \emptyset\}$.

1) $S_K \neq \emptyset$ triv

2) S_K „nyílt" $S_\varepsilon(p)$-n

B: $x_0 \in S_K$, $R_{x_0} \cap K \neq \emptyset \to q_x \in R_{x_0} \cap K$

K nyílt $\to B_{\varepsilon_x}(q_x) \subset K$

$\to \{x : (R_x \cap B_{\varepsilon_x}(q_x)$ - ből p-be húzott egyenes$) \cap S_\varepsilon(p)\}$ nyílt.

3) $x \in S_K \Rightarrow$ a szemben levő $\overline{x}$ pontra $\overline{x} \notin S_K$

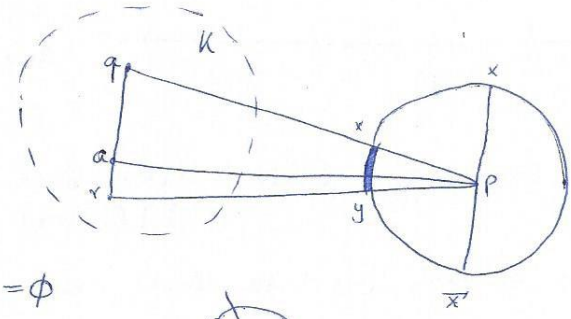
B: $\frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{2}x = p \longrightarrow$ ha benne lenne, $\lightning$ x.-szel $\lightning$.

4) $x \neq y \in S_K \Longrightarrow \widehat{xy}$ vagy $\widehat{yx}$ is $\subset S_K$

B: $R_x \cap K \ni q$, $R_y \cap K \ni r$

$\to [qr] \subset K$. $a \in [qr] \to ap$ félegyenes

körívet adi, amint a befutja $[qr]$ +



1—4) $\Rightarrow S_K \subset$ nyílt félkör

$\Rightarrow \exists \ell : \ell \ni p$, $\ell \cap S_K = \emptyset \longrightarrow \ell \cap K = \emptyset$

Ezzel az $n = 2$ esetet beláttuk. $\square$

Indukció.

Legyen b lineáris tér, maximális úgy, hogy $b \supset a$ és $b \cap K = \emptyset$. $\dim b \leq n - 1$.

Ha $\dim b = n - 1 \longrightarrow$ kiszen vagyunk, b maga a H hipersík.

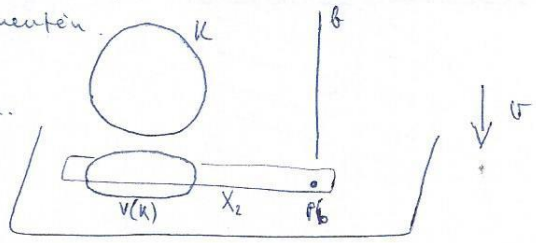
$\lightning$ Ha $\dim b < n - 1$, végezzünk egy v vetítést b mentén.

$v(K)$ is nyílt és konvex, $p_b \cap v(K) = \emptyset$

Ha $\dim = 2$: választható ℓ egyenes a fenti módon.

Ha $\dim > 2$: elvégzünk egy X_2 2-dim. aff altérrel, hogy $X_2 \cap K \neq \emptyset$ és $p_b \in X_2$

Ekkor $\exists \ell \subset X_2$.



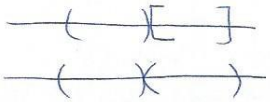
De $v^{-1}(\ell) = b' \supset b \supset a$ és $b' \cap K \neq \emptyset$. $\lightning$. $\square$

A HB-tétel tulajdonképp az egy pontra vonatkozó elválasztást osztályja meg.

Tétel. Ha $U, V \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazok, U nyílt és $U \cap V = \emptyset$, akkor

a) szétválasztható;

b) ha V is nyílt, szigorúan elválasztható.



Biz: $V - U \overset{def}{=} \{v - u : V \ni v,\ U \ni u\}$

1) $V-U$ konvex

B: $v - u \in V - U \qquad v \in V, \quad u \in U$

$v' - u' \in V - U \qquad v' \in V, \quad u' \in U$

$t \in [0,1]$

$$t(v-u) + (1-t)(v'-u') = \left.\begin{array}{l} \underbrace{tv + (1-t)v'}_{\in V} + \underbrace{tu + (1-t)u'}_{\in U} \end{array}\right\} \in V - U \quad \checkmark$$

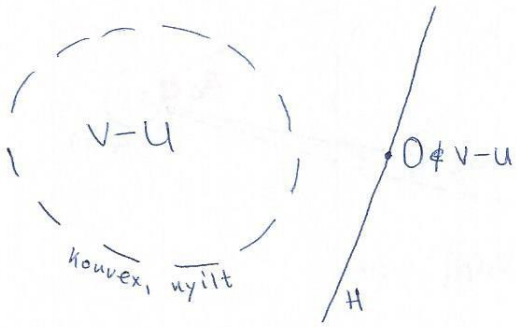
2) $V-U$ nyílt

$$V - U = \bigcup_{\substack{v \in V \\ u \in U}} \{v - u\} = \bigcup_{v \in V} \{v - U\}$$

U nyílt $\Rightarrow (-U)$ nyílt $\Rightarrow (v - U)$ nyílt. Nyíltak uniója nyílt. ✓

3) $0 \notin V - U$.

$$\{ 0 \in V - U \Leftrightarrow \underset{\exists v, u}{0 = v - u} \Leftrightarrow v = u \Rightarrow v, u \in V \cap U = \emptyset \}$$



Hahn–Banach: $\exists H$: $H \ni 0$, $H \cap (V - U) = \emptyset$

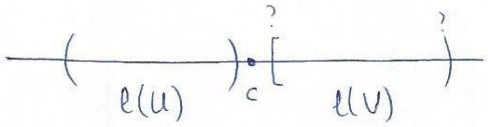
$H = \{x : \ell(x) = 0\}$ ($\exists \ell$ lineáris)

$\Downarrow$

$\ell|_{V-U} > 0$ (vagy < 0)

$\forall u, v$: $\ell(v) - \ell(u) > 0$

$\ell(v) > \ell(u)$



$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\exists c \in \mathbb{R}$: $\ell(u) \leq c \leq \ell(v)$ $\forall u, v$

$\Rightarrow \{x : \ell(x) = c\}$ szétválasztja U-t és V-t. a

b). Ugyanúgy: $\ell(U)$ és $\ell(V)$ nyíltak $\mathbb{R}$-en $\longrightarrow \exists c$: $\ell(u) < c < \ell(v)$.

$\ell(U) \cap \ell(V) = \emptyset$

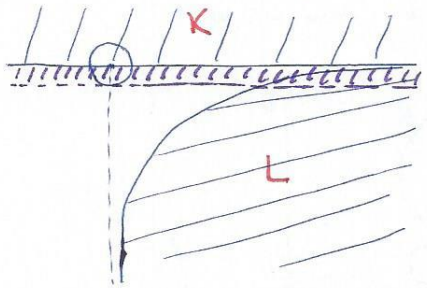
$\square$

Állítás. A kompakt, (x_n) A-beli elemek sorozata $\Rightarrow (x_n)$-nek van konv. részsorozata.

Tétel. (felhívlalás) $K, L \subset \mathbb{R}^n$, konvex és zárt, K kompakt, $K \cap L = \emptyset$

$\Rightarrow \exists U, V$: $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset U$, $L \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ nyílt, konvex halmazok.

Megjegyzés: Kell a kompaktság:



$K = \{y \geq 0\}$

$L = \{y \leq -\frac{1}{x},\ x > 0\}$ $\longrightarrow$ már $U \cap L$ se üres.

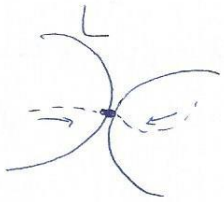
A kompaktság szükségessége a következőn múlik.

Folytonos függvény kompakt halmazon felveszi az infimumát és a szupremumát.

<u>Def.</u> Halmazok távolsága: $d(K,L) = \inf\{|k-l| : k\in K,\ l\in L\}$.

$\Rightarrow \exists\ k_0\in K,\ l_0\in L:\ d(K,L) = |k_0 - l_0|$

<u>Lemma.</u> K, L zárt, K kompakt, $K\cap L=\emptyset \Rightarrow d(K,L)>0$.



B: tf. $d(K,L)=0 \Leftrightarrow \exists (k_n), (l_n):\ \lim d(k_n,l_n)=0$.

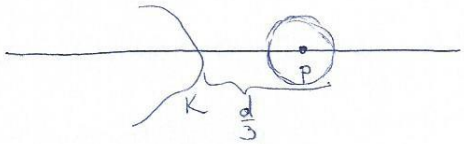
K kompakt $\longrightarrow$ (k_n)-nek van konv. részsorozata: (k_{n_i}).

A fenti lim miatt $\lim\limits_{i\to\infty} d(k_{n_i}, l_{n_i}) = 0$.

$\lim (k_{n_i}) \in K$, mert zárt $\perp \exists \lim (l_{n_i}) \in L \Rightarrow \lim(k_{n_i}) = \lim(l_{n_i}) \in K\cap L = \emptyset$ ↯ □

Az előző tétel BIZONYÍTÁSA:

$$\left.\begin{aligned} U &:= U_{\frac{d}{3}}(K) = \{p\in\mathbb{R}^n : d(p,K) < \tfrac{d}{3}\}, \\ V &:= V_{\frac{d}{3}}(K) = \{p\in\mathbb{R}^n : d(p,L) < \tfrac{d}{3}\} \end{aligned}\right\}$$ nyiltak a „<" miatt.



1) $q\in U$: $\exists\ k\in K$, hogy $|p-k| < \frac{d}{3}$.

$\varepsilon := \frac{d}{3} - |p-k| \longrightarrow \forall q\in B_\varepsilon(p)$

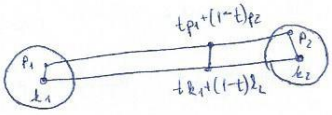
2) U konvex:

$p_1, p_2 \in U_{\frac{d}{3}}(K) \longrightarrow p_1 \in B_{\frac{d}{3}}(k_1),\ p_2 \in B_{\frac{d}{3}}(k_2)$ $\qquad t\in[0,1]$

$tp_1 + (1-t)p_2 \overset{?}{\in} U_{\frac{d}{3}}(K)$

$p_1 = k_1 + v_1;\quad p_2 = k_2 + v_2$

ahol $|v_1| < \frac{d}{3},\ |v_2| < \frac{d}{3}$



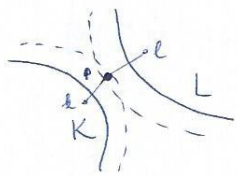
$tp_1 + (1-t)p_2 = t(k_1+v_1) + (1-t)(k_2+v_2) =$

$= tk_1 + (1-t)k_2 + tv_1 + (1-t)v_2$ $\qquad t\in[0,1]$

$\Rightarrow |(tp_1 + (1-t)p_2) - (tk_1 + (1-t)k_2)| = |tv_1 + (1-t)v_2| \leq t|v_1| + (1-t)|v_2| < t\cdot\frac{d}{3} + (1-t)\cdot\frac{d}{3} = \frac{d}{3}$.

3) $U\cap V = \emptyset$

tf. $p\in(U\cap V) \Rightarrow \exists\ k,l:\ \left.\begin{aligned} d(p,k) &< \tfrac{d}{3} \\ d(p,l) &< \tfrac{d}{3} \end{aligned}\right\}\ d(k,l) < \frac{2d}{3} < d$ ↯



□

0. <u>Következmény.</u> U és V szétválaszthatósága miatt K és L is szigorúan szétválasztható. □

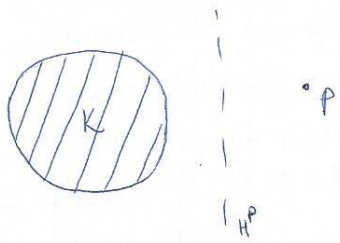
1. <u>Következmény.</u> K zárt, konvex halmaz $K = \bigcap H_{\leq 0}$, azaz felírható féltérek metszeteként.

B: $\{p\}$ konvex, zárt és kompakt

$\longrightarrow \exists H^p:\ K\subset H^p_{\leq 0},\ p\in H^p_{>0}$

Vegyük azt a H^p-nek, ami felezi K és p távolságát.

$\Rightarrow K = \bigcap\limits_{p\notin K} H^p_{\leq 0}$, mert K $\forall$ eleme eleme, de $p\notin K$-ra $p\notin H^p$.



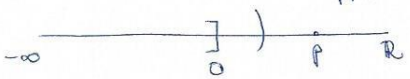
□

<u>Megj.</u> Ha $A\subset\mathbb{R}^n$ és $A = \bigcap H_{\leq 0} \Rightarrow A$ konvex és zárt, mert kx. metszete kx.- és zárt — " — zárt.

2. <u>következmény</u>. K zárt és konvex $\Rightarrow$ $K = \bigcap_{H<0}$.

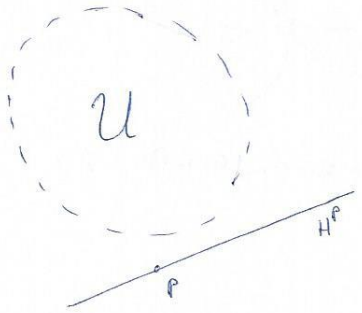
B: Az előző H^p-vel $K = \bigcap_{p \notin K} H^p_{<0}$ megfelel. □

Példa:



$(-\infty, 0] = \bigcap_{p>0} (-\infty, \frac{p}{2})$. Tehát ∞ sok metszete lehet zárt!

3. <u>következmény</u>. U nyílt és konvex $\Rightarrow$ $U = \bigcap H_{<0}$

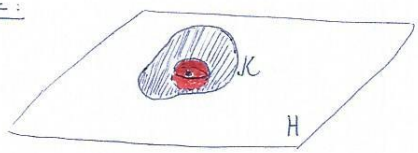


Hahn—Banach: $\exists H^p \ni p$: $U \subset H^p_{<0}$

$\longrightarrow K = \bigcap_{p \notin U} H^p_{<0}$ □

<u>Tétel</u>. K konvex $\mathbb{R}^n$-en és $K^\circ = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\exists H$ hipersík: $K \subset H$.

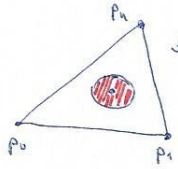
B: $\Leftarrow$:



$p \in K \subset H \longrightarrow \forall \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(p) \not\subset H \Rightarrow B_\varepsilon(p) \not\subset K$ ✓

A gömb kilóg H-ból.

$\Rightarrow$: ↯ $\nexists H$. Ekkor $K \not\subset H$ miatt K-ban $\exists p_0, \dots, p_n$ affin független pontok, amik generálják $\mathbb{R}^n$-et. K konvex $\longrightarrow$ $p_0, \dots, p_n$ konvex burkára $[p_0 \dots p_n] \subset K$.

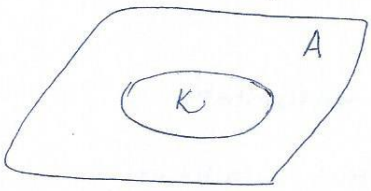


A $p_0, \dots, p_n$ simplex súlypontja belső pont $\Rightarrow K^\circ \neq \emptyset$. ↯ ✓ □

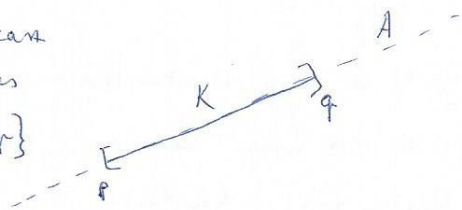
<u>Definíció</u>. Legyen K konvex, $K \subset \mathbb{R}^n$.
A az az affin altér $\mathbb{R}^n$-ben, amit K generál — ez K <u>affin burka</u>.
(A az a legkisebb aff. altér, ami tartalmazza K-t.)
Ekkor K <u>relatív peremé</u>: (relatív határ Moussongnál)

$$\partial_{rel} K = K - \{K \text{ A-ra vonatkozó belső pontjai}\} = K - (K^\circ \cap A)$$

(Alternatív jelölés: $\mathrm{rel}\,\partial K$, $\mathrm{relint}\, K$.)



Példa: $K = [p, q]$ szakasz
$A = (p, q)$ egyenes
$\partial_{rel} [p, q] = \{p, q\}$



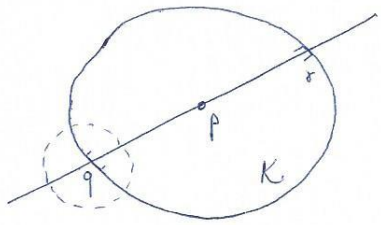
<u>Tétel</u>. K konvex és kompakt, $K \subset \mathbb{R}^n$-re $\overline{\partial_{rel} K} = K$, tehát a relatív határpontok konvex burka maga a halmaz.

B: (Feltesszük, hogy $A = \mathbb{R}^n$).
$\partial_{rel} K \subset K \Rightarrow \overline{\partial_{rel} K} \subset \overline{K} = K$ ✓
Legyen most $p \in K$, l affin egyenes, melyre $p \in l$, tehát l átmegy K-n.

$\ell \cap K \subset \ell$

ℓ és K konvex, K kompakt $\Rightarrow$ $\ell \cap K$ konvex és zárt.

$\Rightarrow \ell \cap K = [q, r]$ zárt szakasz.



Kellene, hogy $q, r \in \partial_{rel} K$.

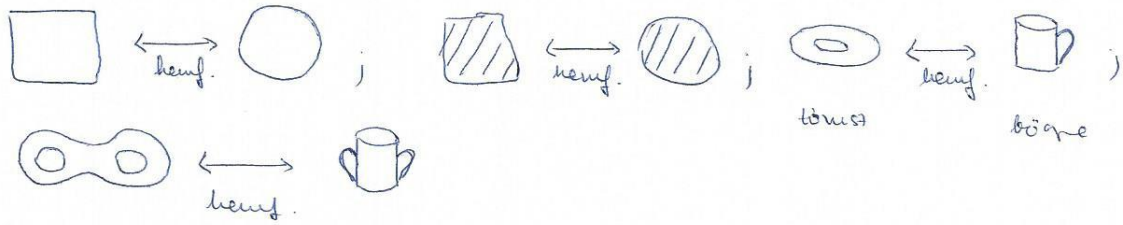
$\Leftrightarrow q \in K - K^\circ_{rel A}$.

Nyilván $q \in K$, tehát csak annyi kell, hogy $q \notin K^\circ_{rel A}$.

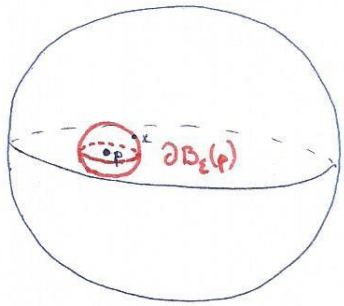
$\{ q \in K^\circ_{rel A} \Rightarrow \exists \varepsilon : B_\varepsilon(q) \subset K$, mert K ny. $\Rightarrow \ell \cap K = [q-\varepsilon, r] \}$. ✓ □

<u>Definíció</u>. <u>Homeomorfizmus</u>: olyan folytonos bijektív leképezés, aminek az inverze is folytonos.

Pl. $[0,2]$ és $[0,1) \cup [2,3]$ között bijekció van, de homf. nincs.



<u>Tétel</u>. K konvex és kompakt, $\mathring{K} \neq \emptyset$.
$\partial K := K - K^\circ$. Ekkor ∂K homf. ∂B_1 és K homf. B_1, ahol
$B_1 = \{ x : |x| \leq 1 \}$ és $\partial B_1 = \{ x : |x| = 1 \}$.



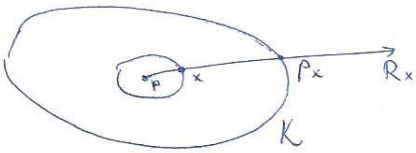
B: $\mathring{K} \neq \emptyset \Rightarrow \exists p \in \mathring{K} : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(p) \subset K$

$\partial B_\varepsilon(p) \longrightarrow \partial K$ leképezés:

$x \in \partial B_\varepsilon(p)$-re R_x az x irányú félegyenes p-ből

$R_x \cap K$: kompakt, konvex halmaz $\Rightarrow \exists p_x : R_x \cap K = [p, p_x]$

$p_x \in \partial K$ ugyanazon bizonyítással, mint az előző tételben.



Ezért $\partial B_\varepsilon(p) \longrightarrow \partial K$ jó homf.:
$x \longmapsto p_x$

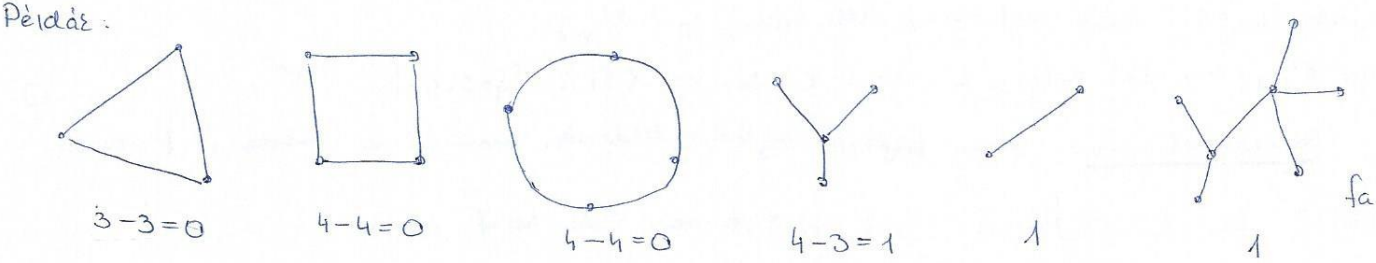
A folytonosságot ki-ε-ozhatóé, de ettől eltekintünk. □

IX. Euler-karakterisztika és homológiák
(bevezetés)

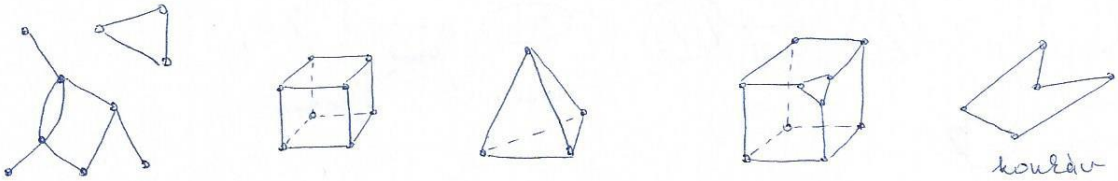
<u>Definíció</u>: Euler-szám, <u>Euler-karakterisztika</u>: topologikus tér szimpliciális felbontására a

$$e = \chi = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot \#(q\text{-szimplexek}) = \#\text{csúcsok} - \#\text{élek} + \#\text{2-szimplexek} - \dots$$

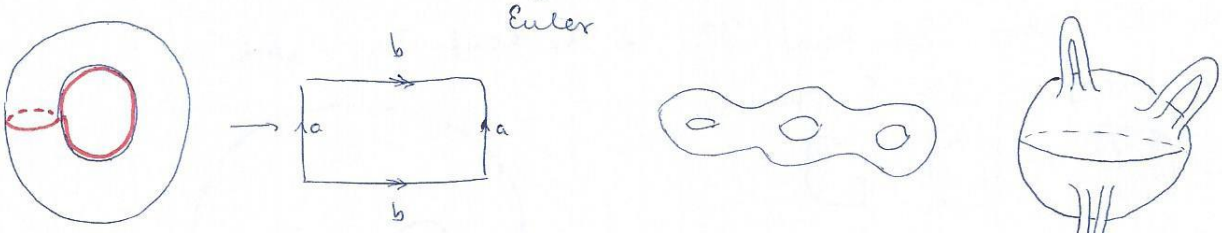
Példák:



$3-3=0$ $\quad 4-4=0$ $\quad 4-4=0$ $\quad 4-3=1$ $\quad 1$ $\quad 1$



-1 $\quad \underbrace{8-12+6=2 \qquad 4-6+4=2 \qquad 2}_{\text{Euler}}$ $\quad 0$



$\left.\begin{array}{ll} \#cs = 1 & (\text{nem } 4) \\ \#é = 2 & (\text{nem } 4) \\ \#l = 1 & \end{array}\right\} \chi = 0$

g lyuk

$\chi = 2 - 2g$

Megjegyzések: szimplexre $\chi = 1$.
A sokszög Euler-karakterisztikája 0: pontra húzhatóság (kontraktibilitás).
Szép még, hogy az Euler-karakterisztika invariáns a felbontásra.
A háttérben az van, hogy $\exists$ $X \rightsquigarrow H_q(X)$ homológiacsoport (Abel-cs.):

rang $H_0 \rightsquigarrow$ # összefüggő komponensek = # független 0-ciklusok

rang $H_1 \rightsquigarrow$ # független 1-ciklusok

rang $H_2 \rightsquigarrow$ # független 2-ciklusok

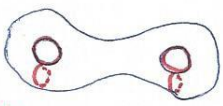
$$\rightarrow \chi = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rang} H_q$$

Példák: S^2: $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} H_0 = 1 \\ \operatorname{rang} H_1 = 0 \\ \operatorname{rang} H_2 = 1 \end{array}\right\} 1-0+1=2$

tórusz $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}^2$, $H_2 = \mathbb{Z}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} H_0 = 1 \\ \operatorname{rang} H_1 = 2 \\ \operatorname{rang} H_2 = 1 \end{array}\right\} 1-2+1=0$

2 vágás: „bátis"

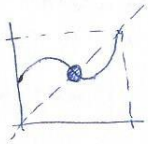
g lyukú orientálható felület: $H_1 = \mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z}^{2g}$, $H_3 = \mathbb{Z}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} H_0 = 1 \\ \operatorname{rang} H_1 = 2g \\ \operatorname{rang} H_2 = 1 \end{array}\right\} 2-2g$



Minden lyukhoz 2 független 1-ciklus tartozik.

Motiváció: fixponttétel általánosan.

Egyszerű vektorra: nakasztól nakasztra képező folyt. függvénynek van fixpontja.



Ez igaz körlapra is stb.

Némi magyarázat arról, hogy hogy jön ide a $\mathbb{Z}$:

A homológiacsoportok (def. később), amint arról már volt említés, Abel-csoportok, és — amint az később előkerül — szabad modulusokon vett leképezésekből származtatjuk őket.

Tehát szükségünk lesz a modulus fogalmára. Ez röviden fogalmazva gyűrű feletti vektortér. A számunkra fontos, hogy minden Abel-csoport modulussá tehető $\mathbb{Z}$ felett: $a \in A$, $n \in \mathbb{Z}$-re $n \cdot a = a + \ldots + a$ $(n>0)$,

$$0 \cdot a = 1_A,$$

$$n \cdot a = a^{-1} + \ldots + a^{-1} \quad (n<0).$$

Térjünk vissza a homológiákhoz! Tudnunk kell, hogy a geometria valamennyi ágának ez az alapja.

Ahhoz, hogy erről beszélni tudjunk, kategóriákra van szükségünk (nem teljes def.)

- objektumok
- rajtuk értelmezett összetett leképezések

(Kiss 547.o.)

Példák:

Lineáris terek; lineáris leképezések

Csoportok, csoportmorfizmusok

Top. terek, folytonos függvények

$$X \rightsquigarrow G(X)$$

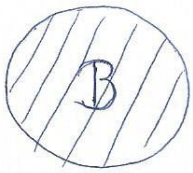
$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow G(X) \xrightarrow{\varphi(f)} G(Y)$$

Tulajdonságok (kategória-axiómák):

a) $X \xrightarrow{id_X} X \rightsquigarrow G(X) \xrightarrow{id_{G(X)}} G(X)$

b) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightsquigarrow G(X) \xrightarrow{\varphi(f)} G(Y) \xrightarrow{\varphi(f)} G(Z)$, $g \circ f$, $\varphi(g \circ f)$

Most bebizonyítjuk a fixponttételt körlapra, szemléltető céllal.

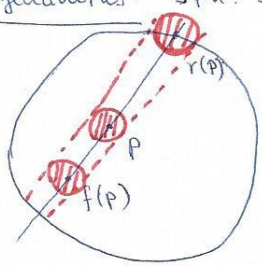


Állítás: A körlap önmagára való folytonos leképezésének van fixpontja.

$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. $\forall f : B \to B$ folytonosra $\exists P \in B : f(P) = P$.

1. segédállítás. Tfh. $\exists f : \forall p \in B : f(P) \neq P$. $\Rightarrow$ $\exists r : B \to \partial B$ folytonos: $r|_{\partial B} = id_{\partial B}$.

B:



$p \neq f(p) \to \exists$ $f(p)P$ félegyenes $\to r(P)$ metszéspont ∂B-vel.

$B \ni p \rightsquigarrow r(P) \in \partial B$

Mivel f folytonos, r is az lesz. (Ki lehetne ε-ozni, ld. ábra) $\boxed{1}$

Feltartjuk, hogy $\exists\, H_1$ homológiacsoport, amire

1) $H_1(B) = 0$

2) $H_1(\partial B) = \mathbb{Z}$

3) $\partial B \xrightarrow{f} B \quad \rightsquigarrow \quad H_1(\partial B) \xrightarrow[H_1(f)]{} H_1(B)$

$B \xrightarrow[g]{} \partial B \qquad H_1(B) \xrightarrow[H_1(g)]{} H_1(\partial B)$

Ha $\exists$ a fenti r:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "r"] & \\ \partial B \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "id_{\partial B}"'] & & \partial B \end{tikzcd} \quad \overset{H_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & H_1(B) \arrow[dr, "H_1(r)"] & \\ H_1(\partial B) \arrow[ur, "H(i)"] \arrow[rr, "id"'] & & H_1(\partial B) \end{tikzcd}$$

Azaz a jobb oldalon:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & \\ \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[rr, "id"'] & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Ez ellentmondás, mert 0-ról az egyetlen csoportmorfizmus a konstans 0. ↯

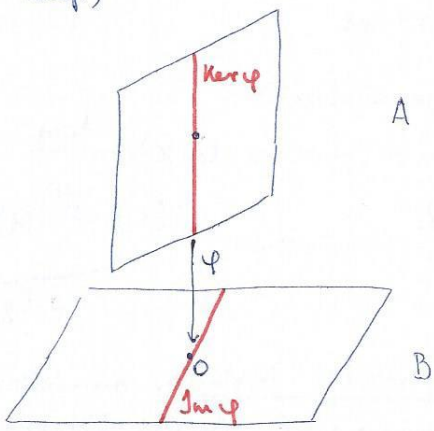
Tehát r nem létezik $\Rightarrow$ van fixpont. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ez a bizonyítás akkor fog működni, ha H_1 $\exists$.

Legyenek A és B Abel-csoportok (vagy néha a szemléltetés kedvéért K-vektorterek).

$A \xrightarrow{\varphi} B \qquad \varphi$ csoportmorfizmus (lin. kép.)

$\left.\begin{array}{l} A \supset \operatorname{Ker}\varphi \\ B \supset \operatorname{Im}\varphi \end{array}\right\}$ részcsoportok, Abel.



<u>Állítás.</u>

$A / \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

rang ker φ + rang im φ = rang A

(Vektorterekre rang helyett dim.)

<u>Def.</u> $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$

B-ben <u>egzakt</u>, ha $\operatorname{im}\varphi = \ker\psi$,

B-ben <u>félegzakt</u>, ha $\operatorname{im}\varphi \subseteq \ker\psi$.

Mindkét esetben $\psi \circ \varphi = 0$.

$0 \to A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$ egzakt, ha

$\forall i$: $\operatorname{im}\partial_i = \ker\partial_{i-1}$, félegzakt, ha $\forall i$ $\operatorname{im}\partial_i \subseteq \ker\partial_{i-1}$

<u>Def.</u> <u>Homológiacsoport</u>: $H_i = \dfrac{\ker\partial_{i-1}}{\operatorname{im}\partial_i}$

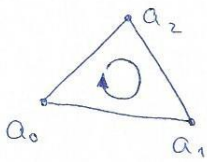
Legyen $X = \bigcup_{q \geq 0} \bigcup_{i=1,\dots,\#q} s_{q,i}$, ahol $s_{q,i}$ q-szimplex,

$$\partial s_{q,i} = \sum_j n_{q-1,j}\, s_{q-1,j} \qquad n_{q-1} \text{ szám}$$

Legyenek (a_i) csúcsok $\longrightarrow$ $\sigma = (a_{i_0}, \dots, a_{i_q})$ q-szimplex

Irányított szimplex: $(a_0, a_1, \dots, a_q) \sim \varepsilon(\pi) \cdot (a_{\pi(0)}, \dots, a_{\pi(q)})$, ahol π permutáció és $\varepsilon(\pi)$ a π előjele (páros / pt.)

$(a_0, a_1) \sim -(a_1, a_0)$



$(a_0, a_1, a_2) \sim (a_1, a_0, a_2) \cdot (-1)$

$A_q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}\langle s_{q,i} \rangle_{i=1}^{\#q}$ (szabad modulus) (Vektortér: $A_q = K\langle s_{q,i} \rangle_{i=1}^{\#q}$)

$A_q \xrightarrow{\partial} A_{q-1}$

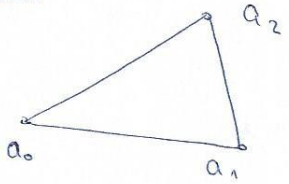
$A_q = \left\{ \sum_j n_{q,j} \sigma_{q,j} : n_{q,j} \in \mathbb{Z} \right\}$

$(a_0, \dots, a_q) \xmapsto{\partial} \sum (-1)^i (a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_q)$

határleképezés

$\hookrightarrow$ elhagyjuk

<u>Példa.</u>



Csak 0- és 1-ciklusok vannak.

$A_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1, a_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}^3$

$A_1 = \mathbb{Z}\langle (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1, a_2) \rangle \simeq \mathbb{Z}^3$

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\partial} A_0 \longrightarrow 0$$

$\partial(a_0, a_1) = +(\widehat{a_0}, a_1) - (a_0, \widehat{a_1}) = a_1 - a_0$ Triviálisan félegzart.

Épp az egzaktság mértéke a homológiacsoport:

$H_1 = \dfrac{\ker \partial}{\operatorname{im} 0} = \ker \partial$; $H_0 = \dfrac{\ker 0}{\operatorname{im} \partial} = \dfrac{A_0}{\operatorname{im} \partial}$ Most ezeket pontosan is meghatározzuk.

$$\partial: \left.\begin{aligned} (a_0, a_1) &\longrightarrow a_1 - a_0 \\ (a_0, a_2) &\longrightarrow a_2 - a_0 \\ (a_1, a_2) &\longrightarrow a_2 - a_1 \end{aligned}\right\} \quad \partial = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = n_{01}(a_0, a_1) + n_{02}(a_0, a_2) + n_{12}(a_1, a_2)$

$\downarrow$

$\partial x = n_{01}(a_1 - a_0) + n_{02}(a_2 - a_0) + n_{12}(a_2 - a_1)$

$\Rightarrow$ $a_0(-n_{01} - n_{02}) +$
$a_1(+n_{01} - n_{12}) +$
$a_2(+n_{02} + n_{12}) = 0$

a_0, a_1, a_2 ftlen $\Rightarrow$ $n_{01} = n_{02} = n_{12}$ $\Rightarrow$ rang $\partial = 1$, 1 szabadsági fok van.

$\Rightarrow \ker \partial = n \cdot (a_0 a_1 + a_2 a_0 + a_1 a_2)$.

Persze $\partial(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_0) = 0$. Ez egy 1-ciklus tehát, aminek 0 (nincs) határa

$\Rightarrow H_1 = \mathbb{Z}\langle a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_0\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

$A_0/\mathrm{im}\,\partial$-ben $\quad a_1 \sim a_0$, mert $\partial(a_0a_1) = a_1 - a_0$

$a_2 \sim a_0$, mert $\partial(a_0a_2) = a_2 - a_0$

$a_1 \sim a_2$, mert $\partial(a_1a_2) = a_2 - a_1$.

azonosítja őket a faktorizálás

$$\Rightarrow H_0 = \frac{\mathbb{Z}\langle a_0, a_1, a_2\rangle}{a_0\sim a_1,\ a_1\sim a_2,\ a_2\sim a_0} = \mathbb{Z}$$

Tehát $H_1 = H_0 = \mathbb{Z}$.

Példa.

$A_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1, a_2\rangle$

$A_1 = \mathbb{Z}\langle (a_0, a_1)\rangle$

$0 \to A_1 \xrightarrow{\partial} A_0 \to 0$

$(a_0, a_1) \mapsto a_1 - a_0 \qquad \mathrm{Ker}\,\partial = 0 \qquad H_1 = \dfrac{\mathrm{Ker}\,\partial}{\mathrm{im}\,0} = \dfrac{0}{\mathrm{im}\,0} = 0$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3$

$1 \mapsto (-1, +1, 0)$

$n \mapsto (n, +n, 0)$

$$H_0 = \frac{A_0}{\mathrm{im}\,\partial} = \frac{\mathbb{Z}\langle a_0, a_1, a_2\rangle}{(a_0, a_1)} = \mathbb{Z}^2$$

A ∂ leképezés az összefüggőséget azonosítja; azt vizsgálja, hány komponens van.

Csoportelméleti kitekintés: faktorterek

Legyenek A és B K-vektorterek, $A \subset B$.

$b_1, b_2 \in B$: $\quad b_1 \sim b_2 \iff b_1 - b_2 \in A$

$\longrightarrow$ ekvivalenciaosztályokra bont: $\overline{b}$, $\widehat{b}$, $[b]$. : $[b] = b + A$.

$B/A = \{[b] : b \in B\}$ vektortér

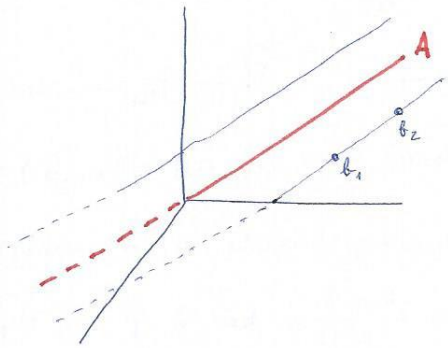
A melléosztályok reprezentáns függetlenek:

$[b] + [c] = [b + c]$

$b \quad c \longrightarrow b + c$

$b' \quad c' \longrightarrow b' + c' = b + c + \underbrace{(a_1 + a_2)}_{A}$

$b' - b = a_1 \in A \qquad c' - c = a_2 \in A$

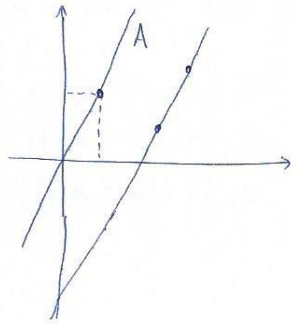


A-ra nézve azonosak.

Ez működik csoportokra is, ha a bal és jobb oldali melléosztályok megegyeznek, azaz ha $A \triangleleft B$. Ezt itt kihasználtuk fel a bizonyításban.

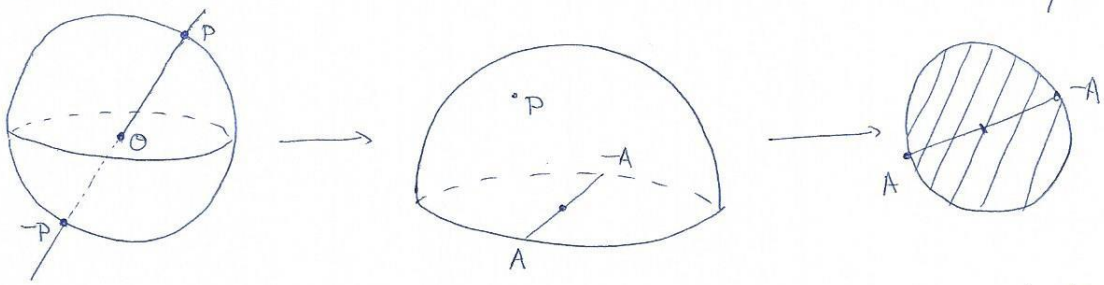
Példa. $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{R}\langle (1,2)\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{R}\langle (1,2)\rangle = \mathbb{R}$,

mert $\lambda \xrightarrow{\text{izo}} [(\lambda, 0)]$ (könnyen látható, hogy izo)



Vizsgáljuk most a projektív síkot!

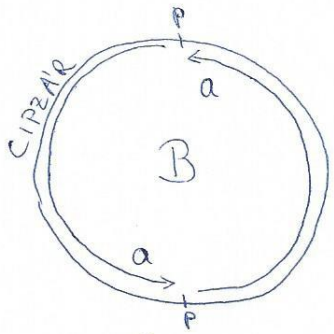
Modell: S^2-ben minden pontot azonosítunk az átellenesével: $S^2/_{P\sim(-P)} = \mathbb{R}P^2$ valós projektív sík



$P \sim (-P)$

Kimarad az azonosításból a peremen → olyan körlap, aminek a peremén lévő pontok azonosítva az átellenessel.

Topológiailag:



A ciptár nem húzható be $\mathbb{R}^3$-ben, mert $P\mathbb{R}^2$ nem ágyazható be $\mathbb{R}^3$-ba.

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0$$

$A_2 = \mathbb{Z}\langle B\rangle$ 2-cellák; B

$A_1 = \mathbb{Z}\langle a\rangle$; a

$A_0 = \mathbb{Z}\langle p\rangle$; p

$\partial_1\langle a\rangle = \partial \begin{smallmatrix} p \\ \to p \end{smallmatrix} = p - p = 0.$ → a-nak nincs peremе, zárt út

$$H_0 = \frac{A_0}{\operatorname{im}\partial_1} = \frac{A_0}{0} = \mathbb{Z}$$

$\partial_2\langle B\rangle = \circlearrowleft = 2a.$ $\quad \operatorname{Ker}\partial_2 = 0$ → $H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\cdot\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$, mert $\circlearrowleft$ nem határa semminek önmagában, de $\circlearrowleft$ már határ.

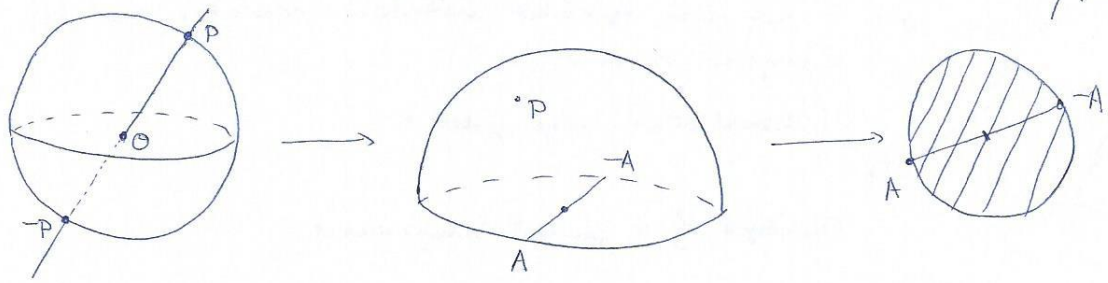
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$H_2 = 0 \quad H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2\cdot\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \quad H_0 = \mathbb{Z}$

Ebből következik, hogy mivel a homológiacsoportjai egyik korábban leírottal sem egyeznek meg, $P\mathbb{R}^2 \not\simeq$ velük, tényleg valami új.

Vizsgáljuk most a projektív síkot!

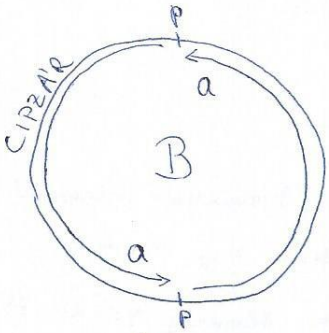
Modell: S^2-ben minden pontot azonosítunk az átellenesével: $S^2 / P \sim (-P) = \mathbb{R}P^2$ valós projektív sík



$P \sim (-P)$

Kimarad az azonosításból a peremen → olyan korongot, aminek a peremén lévő pontok azonosítva az átellenessel.

Topológiailag:



A cipzár nem húzható be $\mathbb{R}^3$-ben, mert $P\mathbb{R}^2$ nem ágyazható be $\mathbb{R}^3$-ben.

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0$$

$A_2 = \mathbb{Z}\langle B \rangle$ 2-cellák (B), $A_1 = \mathbb{Z}\langle a \rangle$ (a), $A_0 = \mathbb{Z}\langle p \rangle$ (p)

$\partial_1 \langle a \rangle = \partial \, {}^{p}_{p} = p - p = 0.$ → a-nak nincs peremе, zárt út

$$H_0 = \frac{A_0}{\operatorname{im} \partial_1} = \frac{A_0}{0} = \mathbb{Z}$$

$\partial_2 \langle B \rangle = \circlearrowleft = 2a.$ $\quad \operatorname{Ker} \partial_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2 \cdot \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$, mert ↺ nem határ

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$H_2 = 0 \qquad H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{2 \cdot \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \qquad H_0 = \mathbb{Z}$

semminek önmagában, de ↺ már határ.

Ebből következik, hogy mivel a homológiacsoportjai egyik korábban látottal sem egyeznek meg, $P\mathbb{R}^2 \not\approx$ velük, tényleg valami új.

További magyarázat és példák

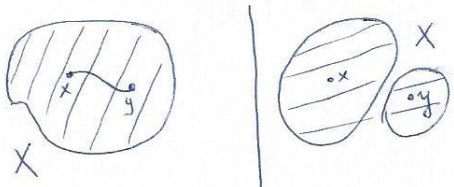
H_0-t hogyan kétféleképpen megközelíteni.

① Legyen X halmaz → H_0 X öfüggő komponenseinek száma.

$x \sim y$ úttal összekötöttség relációja: $\exists f : [0,1] \to X$ folytonos, $f(0) = x$, $f(1) = y$.

$\sim$ ekvivalenciareláció → x osztálya $[x] = \{ y : y \sim x \}$, az osztályok az összefüggő komponensek.

(Akkor, hogy f folytonosságáról beszélhessünk, analitikus ill. X topológiájának ismerete kell.)



$x \sim y$ $\qquad$ $x \not\sim y$

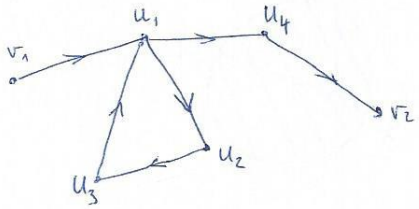
$X = [x] \sqcup [y]$

Éppen ezt az azonosítást végzi el az $\operatorname{im}\partial_1$-gyel való faktorizálás.

② Kombinatorikusan, diszkréten: $G=(\mathcal{V},\mathcal{E})$

$\mathcal{V}$-ben $\sim$ reláció: $v_1 \sim v_2 \iff \exists$ élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, melynek végpontjai v_1 és v_2.

(Élismétlődés megengedett.)



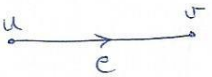
Osztályok: $\frac{\mathcal{V}}{\sim}$ = öfüggő komponensek

Formalizáljunk!

$u \sim v \iff \exists e \in \mathcal{E} : \partial e = u, v$

Bevezetjük az él irányítását:

$u \sim v \iff \exists e \in \mathcal{E} : \underbrace{\partial e = v - u}_{\text{irányított peremen, analóg a Riemann-integrállal}}$



A „kivonás"-nak csoportban van értelme, kiné tehát egy csoport.

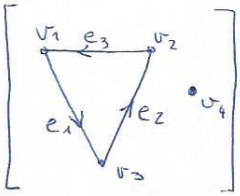
$\mathbb{Z}$ feletti csoportot fogunk venni, de tulajdonképpen bármely gyűrű felett vehetnénk; $\mathbb{Z}$ jó lesz, mert irányítást is tud mutatni.

$A_0 = \mathbb{Z}\langle v\rangle_{v\in\mathcal{V}} = \mathbb{Z}\langle v_1,\dots,v_{|\mathcal{V}|}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{s} n_i v_i \;\middle|\; n_i \in \mathbb{Z}\right\} \approx \mathbb{Z}^s$, ahol $s=|\mathcal{V}|$,

$v_1,\dots,v_s$ a bázis. Pl. $3v_1 - 2v_2 + 5v_3 = (3,-2,5)$ $(s=3)$

Mivel minket a komponensek érdekelnek, szükségünk van az élek hasonló kezelésére, így továbbmegyünk: $A_1 = \mathbb{Z}\langle \vec{e}\rangle_{e\in\mathcal{E}}$

<u>Példa:</u>

$G =$ 

$A_1 = \{n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3\} \approx \mathbb{Z}^3$

$A_0 = \{n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 + n_4v_4\} \approx \mathbb{Z}^4$

Mit jelent itt ∂e?

$e_1 \xrightarrow{\partial} v_3 - v_1$

$e_2 \xrightarrow{\partial} v_2 - v_3$

$e_3 \xrightarrow{\partial} v_1 - v_2$

$\partial : A_1 \longrightarrow A_0$, $\mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ $\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \partial$

$\operatorname{im}\partial \hookrightarrow \mathbb{Z}_4$

$H_0 = \mathbb{Z}^4/\operatorname{im}\partial$.

$n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 \xrightarrow{\partial} n_1(v_3-v_1) + n_2(v_2-v_3) + n_3(v_1-v_2) =$

$= \underbrace{(-n_1+n_3)v_1 + (n_2-n_3)v_2 + (n_1-n_2)v_3}_{\text{az ilyeneket tekintjük 0-nak}}$

$\operatorname{rang}\partial = 2 \Rightarrow \operatorname{im}\partial \approx \mathbb{Z}^2$

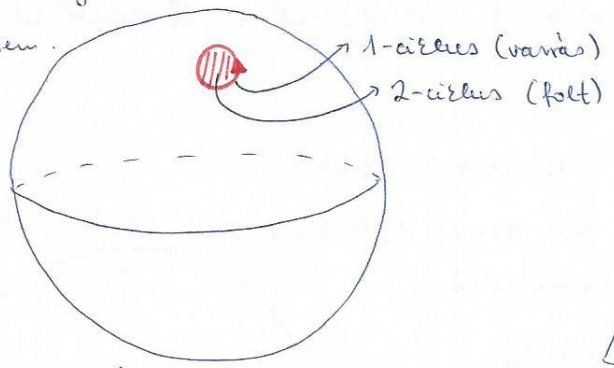
$H_0 = \mathbb{Z}^4/\operatorname{im}\partial \approx \mathbb{Z}^4/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$, valóban 2 komponens van, $[v_1]$ és $[v_4]$ bázis H_0-ban.

Ha $a, a' \in A_0$ és $a \sim a' \iff (a-a') \in \operatorname{im}\partial$. $H_0 = A_0/\operatorname{im}\partial = \{[a]\}$.

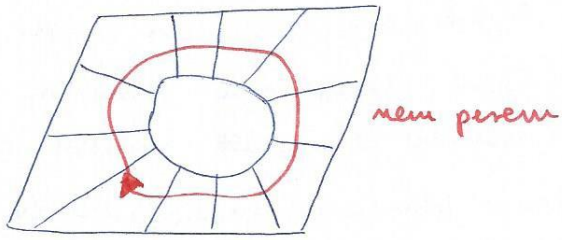
Itt ∂ ∂_1-et jelent, $A_1 \to A_0$ leképezés.

H_1-re is hasonlóan részletesen megnézzük.

Azt mérjük, hogy egy 1-ciklus, azaz egy kurzor határ-e vagy sem, azaz kitölthető-e vagy sem.



futballlabda



lyukas sík

A kérdés, hogy van-e „folt" is, vagy csak egy vonás?

Formalizáljunk!

X tér, benne csúcsok, élek, 2-lapok (= 2-szimplexek), ...

X-et felháromszögezzük / tetraédrezzük / ...

$A_0 = \mathbb{Z}\langle v\rangle_{v\in\mathcal{V}}$

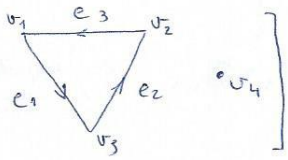
$A_1 = \mathbb{Z}\langle e\rangle_{e\in\mathcal{E}}$

Mit jelent, hogy egy 1-ciklus zárt? Azt, hogy a peremre 0:

$$\partial_1\left(\sum_i n_i e_i\right) = 0, \quad \left(\sum_i n_i e_i\right) \in \operatorname{Ker}\partial_1$$

Példa.

$$G = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array}\right.$$



$$\partial_1\left(\sum n_i e_i\right) = (-n_1+n_3)v_1 + (n_2-n_3)v_2 + (n_1-n_2)v_3 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad n_1 = n_2 = n_3 (= n)$

$\Rightarrow \sum n_i e_i = n\cdot(e_1+e_2+e_3)$, valahányszor körbemegyünk.

$$\underset{\text{2-ciklus}}{A_2} \xrightarrow{\partial_2} \underset{\text{1-ciklus}}{A_1} \xrightarrow{\partial_1} A_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$\cup$

$Z_1 = \{\text{zárt ciklusok}\} = \operatorname{Ker}\partial_1$

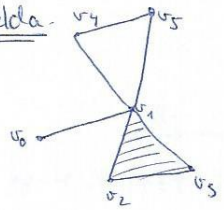
$\cup$

$B_1 = \{\text{kitölthető ciklusok}\}$

$A_2 = \mathbb{Z}\langle 2\text{-szimplex}\rangle$

2-szimplexre már van sorsunk!

Példa.



$\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_5\}$

$\mathcal{E} = \{\text{élek}\}$

$\mathcal{S} = \{\langle v_1, v_2, v_3\rangle\}$

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle \sim \varepsilon(\sigma)\langle v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}\rangle$$

Az irányítást jobbkéz-szabály szerint végezzük.

$$\partial_2(a_1, a_2, a_3) = \sum_i (-1)^{i+1} \dots \widehat{a_i} \dots = +(a_2a_3) - (a_1a_3) + (a_1a_2) = (a_2a_3) + (a_3a_1) + (a_1a_2)$$

Vegyük észre, hogy $\partial_1(x,y) = +y - x$ miatt $\partial_1\partial_2(a_1,a_2,a_3) = 0$.

Ennek alapján új leírhatóságot vonunk le.

Állítás. Perem peremé 0.

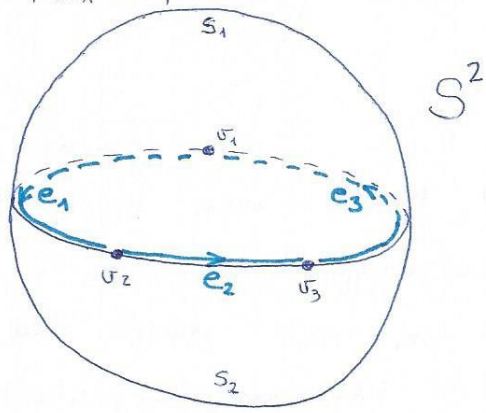
$$\partial_1 \circ \partial_2 \equiv 0.$$

Tehát H_1-et úgy kapjuk, hogy a zártakat faktorizáljuk a kitölthetőkkel:

$$H_1 = \frac{Z_1}{B_1} = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2}$$

Így kapjuk azt, hogy mi zárt, de kitölthetetlen.

Példa. Gömb. Becsületesen tetraéder, de arra $A_2 \approx \mathbb{Z}^4$, $A_1 \approx \mathbb{Z}^6$, $A_0 \approx \mathbb{Z}^4$ $\longrightarrow$ hosszas számolás. Egyszerűbb modellt használunk.



Ebben a felbontásban $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_+$ és $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_-$ különböző (fent, lent)!

$$A_2 = \mathbb{Z}\langle s_1, s_2 \rangle \approx \mathbb{Z}^2$$
$$A_1 = \mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \approx \mathbb{Z}^3$$
$$A_0 = \mathbb{Z}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \approx \mathbb{Z}^3$$

$$s_1 \xrightarrow{\partial_2} e_1 + e_2 + e_3, \quad s_2 \xrightarrow{\partial_2} e_1 + e_2 + e_3$$

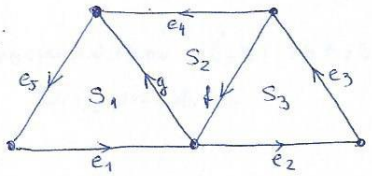
$$e_1 \xrightarrow{\partial_1} v_2 - v_1, \quad e_2 \xrightarrow{\partial_1} v_3 - v_2, \quad e_3 \xrightarrow{\partial_1} v_1 - v_3$$

$$H_0 = \frac{A_0}{\operatorname{im} \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle}{\mathbb{Z}\langle \underbrace{v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_1 - v_3}_{\text{lineárisan öf.}} \rangle} \approx \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^2} = \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \text{ összefüggő komponens van}$$

$$H_1 = \frac{Z_1}{B_1} = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \ker \partial_1 &= \{ n(e_1 + e_2 + e_3) \mid n \in \mathbb{Z} \} \approx \mathbb{Z} \\ \partial_2(n s_1) &= \partial_2(n s_1) = n(e_1 + e_2 + e_3) \end{aligned}\right\} Z_1 = B_1, \Rightarrow \text{minden zárt út kitölthető}$$

Példa.



$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ perem:

$$\partial_2(s_1 + s_2 + s_3) = \partial_2 s_1 + \partial_2 s_2 + \partial_2 s_3 =$$
$$= (e_1 + g + e_5) + (-f + e_4 - g) + (e_2 + e_3 + f) =$$
$$= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

Perem peremé 0: $\partial_1(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = 0.$
(félegzártság)

Példa.

$H_2 = \ker \partial_2 \qquad X = S^2$

$$\partial_2(a s_1 + b s_2) = (a+b) \cdot (e_1 + e_2 + e_3) = 0 \Rightarrow (a+b) = 0 \Rightarrow \underline{a = -b}$$

$\Rightarrow \ker \partial_2 = \mathbb{Z}\langle s_1, -s_2 \rangle \approx \mathbb{Z} \Rightarrow$ egyszerűen irányított zárt felület, maga az S^2

$$\chi_{\text{Euler}} = \#cs - \#\ell + \#\text{2-szimpl.} - \ldots = 3 - 3 + 2 = \underline{2}$$
$$\chi_{\text{homológiai Euler}} = \sum_i (-1)^i \operatorname{rang} H_i = 1 - 0 + 1 = \underline{2}$$

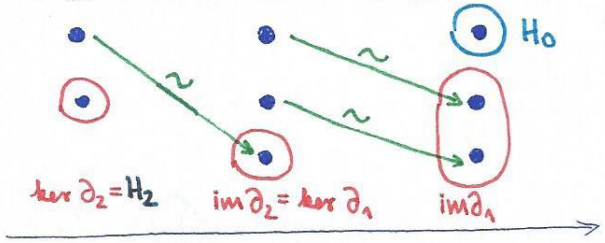
Az Euler-kar. azért független a felbontástól, mert az valójában a homológiai alternáló összeg.

Az algebra főtétele.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow & & \cup \\ \ker f & & \operatorname{im} f \end{array} \qquad \underbrace{\operatorname{rang} \operatorname{im} f}_{\text{ami túlél}} = \operatorname{rang} A - \underbrace{\operatorname{rang} \ker f}_{\text{ami meghal}}$$

Példa. $X = S^2$

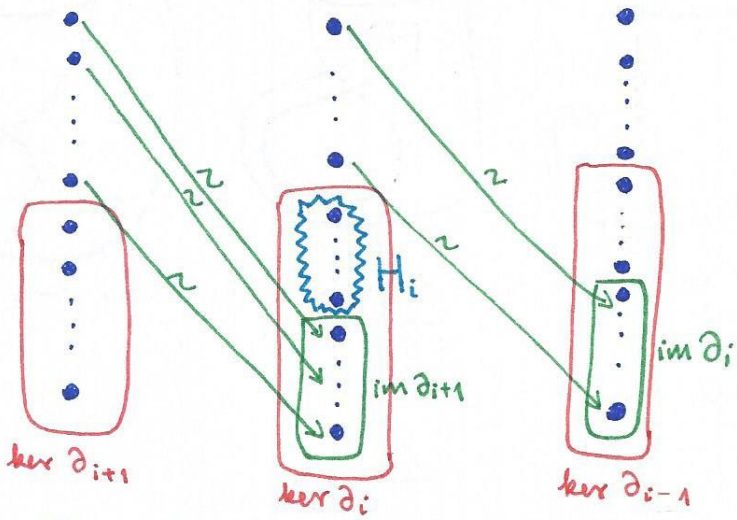
$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_0 & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\partial_2"] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r, "\partial_1"] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$



A főtétel miatt bármi is a felbontás, sorban összeadva épp a homológia marad $\Rightarrow \chi_{Euler} = \chi_{hom}$

Általánosan:

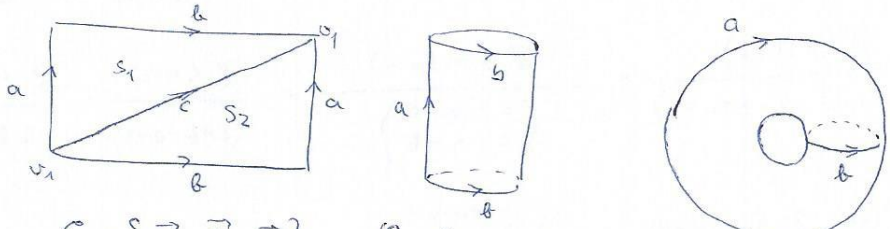
$$\begin{tikzcd} A_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "\partial_i"] & A_{i-1} \end{tikzcd}$$



$$\underbrace{\sum_i (-1)^i \underset{\operatorname{rang} A_i}{\underset{\parallel}{a_i}}}_{\chi_{Euler}} = \sum_i (-1)^i \left(\operatorname{rang} \operatorname{im} \partial_i + \operatorname{rang} H_i + \operatorname{rang} \operatorname{im} \partial_{i+1}\right) = \underbrace{\sum (-1)^i \operatorname{rang} H_i}_{\chi_{hom}}$$

Tehát a simplexszám altemáló összege = homológiák alt. összege.

Példa. Tórusz



$\mathcal{V} = \{v_1\}$ $\quad \mathcal{E} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ $\quad \mathcal{S} = \{s_1, s_2\}$

$\chi = 1 - 3 + 2 = \underline{\underline{0}}$

most felírjuk mindezt homológiákkal is.

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \longrightarrow 0$$
$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^1$$

∂_2: $s_1 \longmapsto c-b-a$, $s_2 \longmapsto b+a-c$ $\Rightarrow \partial_2(s_1+s_2)=0 \Rightarrow \ker\partial_2 = \mathbb{Z}\langle s_1+s_2\rangle = \{n(s_1+s_2)\} \approx \mathbb{Z}$

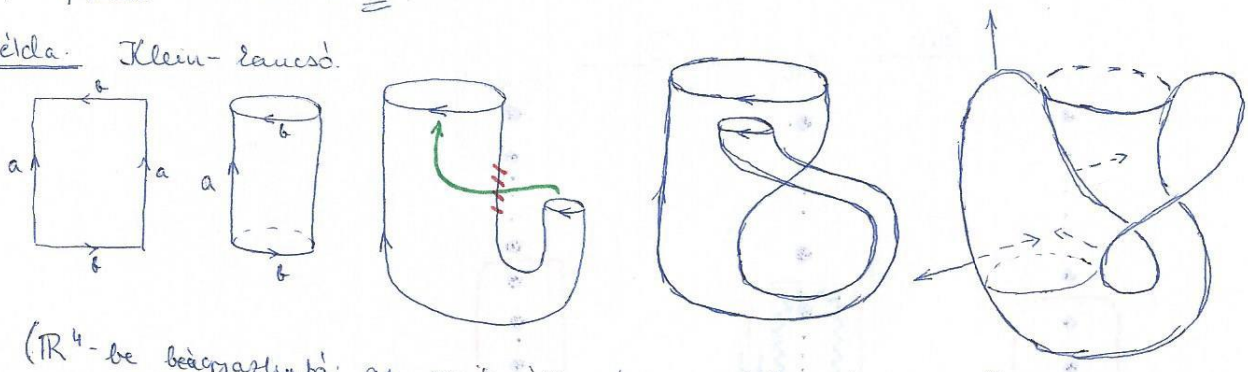
$\Rightarrow H_2 = \ker\partial_2 \approx \mathbb{Z}$, maga az irányított felület generátora.

$$H_1 = \frac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2} = \frac{A_1}{\langle c-b-a\rangle} = \frac{\mathbb{Z}\langle a,b,c\rangle}{\langle c=a+b\rangle} = \mathbb{Z}\langle a,b\rangle \approx \mathbb{Z}^2$$

∂_1: $a \longmapsto v_1-v_1=0$, $b \longmapsto v_1-v_1=0$, $c \longmapsto v_1-v_1=0$ $\Big\}$ $\partial_1 \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{im}\partial_1 \equiv 0 \Rightarrow H_0 = \frac{A_0}{\operatorname{im}\partial_1} = \frac{A_0}{0} \approx \mathbb{Z}$

$\chi_{hom} = 1-2+1 = \underline{\underline{0}}$

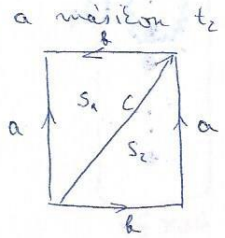
Példa. Klein-kancsó.



($\mathbb{R}^4$-be beágyazható: az egyik úton t_1, a másikon $t_2 \neq t_1$ időben megpörgik $\longrightarrow$ nincs önmetszés.)

Nem irányítható felület.

Azt várjuk, hogy $H_2 = 0$ lesz..



$\partial_2 s_1 = -a+b+c$

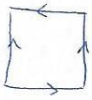
$\partial_2 s_2 = a+b-c$

$\partial_1 \equiv 0$ továbbra is $\longrightarrow H_0 = \mathbb{Z}$

$\partial_2: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \partial_2(As_1+Bs_2) = a(B-A)+b(A+B)+(A-B)\cdot c = 0$

$\Rightarrow A=B=0 \Rightarrow \ker\partial_2 = 0 = H_2$

$$H_1 = \frac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2} = \frac{\mathbb{Z}\langle a,b,c\rangle}{\langle c+b=a,\ b+a=c\rangle} = \frac{\mathbb{Z}\langle a,b,c\rangle}{\left\langle \begin{matrix} c=a+b \\ c=a-b \end{matrix}\right\rangle} = \frac{\mathbb{Z}\langle a,b\rangle}{\langle a+b=a-b\rangle} = \frac{\mathbb{Z}\langle a,b\rangle}{2\cdot b=0} = \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}_2$$

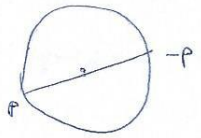
b nem peremen, de $2\cdot b$ peremen: ∂  $= a+b-a+b = 2b$.

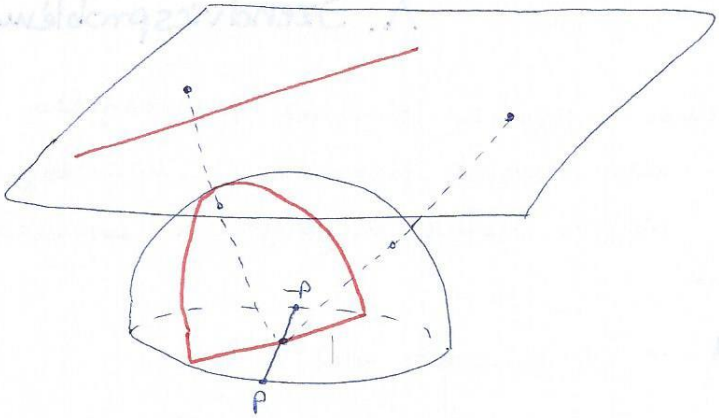
(Az eljárás görbületekkel is elvégezhető: a háromszögek szögfeleslegét összeadva χ_{Euler} jön ki.)

Példa: $\mathbb{PR}_2$

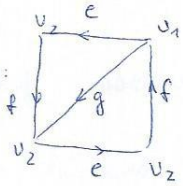
∞-ben lévő pontok $\longrightarrow$ a kör.

P és $(-P)$ azonosítva.

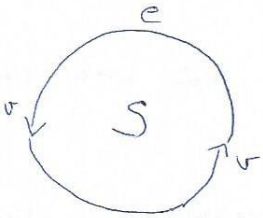




Rendes számoláshoz:



Gyors számoláshoz:



$$A_2 = \mathbb{Z}\langle s\rangle \xrightarrow{\partial_2} A_1 = \mathbb{Z}\langle e\rangle \xrightarrow{\partial_1} A_0 = \mathbb{Z}\langle v\rangle$$

$$(\mathbb{Z}\langle s_1, s_2\rangle) \qquad (\mathbb{Z}\langle e, f, g\rangle) \qquad (\mathbb{Z}\langle v_1, v_2\rangle)$$

$\partial_1 e = v - v \Rightarrow \partial_1 \equiv 0$

$\partial_2 s = e + e = 2e$

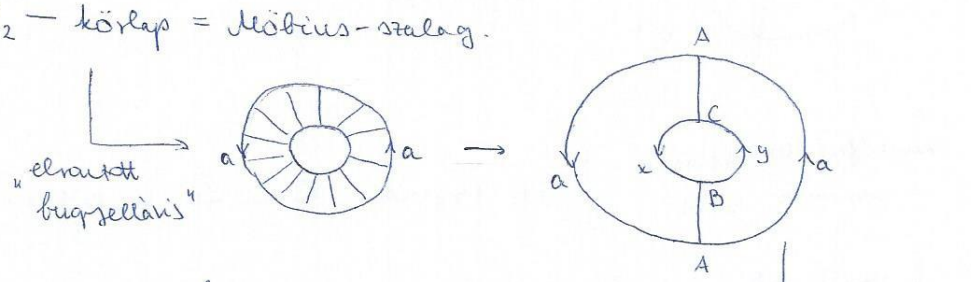
$H_0 = \dfrac{\mathbb{Z}}{\operatorname{im}\partial_1} = \dfrac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}$

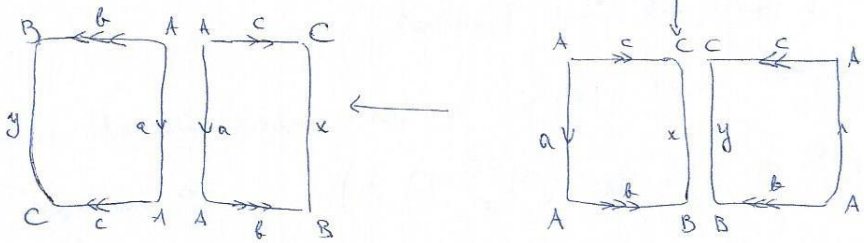
$H_1 = \dfrac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2} = \dfrac{\mathbb{Z}\langle e\rangle}{\langle 2e\rangle} = \mathbb{Z}_2$

$H_2 = \ker\partial_2 = \{ns : \partial(ns) = 0\} = \{ns : 2ne = 0\} \overset{n=0}{=} 0 \Rightarrow$ a felület nem irányított

Állítás. $\mathbb{PR}_2$ — körlap = Möbius-szalag.

B.





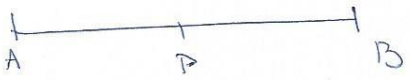
Möbius-szalag

$\square$

X. Szendvicsproblémák

A problémák vizsgálata folytonos függvényeken és tereken múlik, tehát nagy szerepet játszanak a homológiák. A folytonosság néhol jobban előjön, néhol megbújik a homológiákban, akár az irányítás is kijönnek.

Sós rúd — 1-dimenziós eset:



$AB \subset \mathbb{R}$. $\exists! P$: hosszban felezi

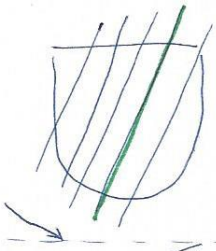
A nem elég és a fél sor közti határt keressük $\longrightarrow$ folytonosság.

Síkbeli kenyér

$K \subset \mathbb{R}^2$ $\exists H$ egyenes: területben 2 egyenlő részre osztja.

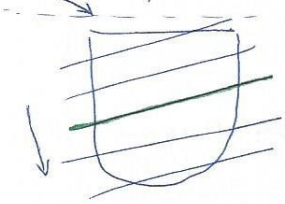
A kenyér kompakt, de konvexitás nem kell.

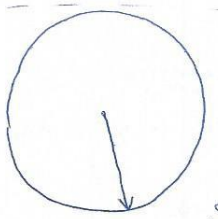
Ugyanúgy, mint az előbb. $I\#$ nem lesz egyértelműség.



Az egyenest toljuk el önmagával $\parallel$-an.

Erősebb változat: $\forall$ irányhoz $\exists!$ egyenes, ami felez





S^1

Normálvektort vesszük, a $\downarrow$ irányú fél területe az egyenes folytonos függvénye.

Síkbeli szendvics

$K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt nemelfajuló kenyér
$S \subset \mathbb{R}^2$ —"— —"— sajt
] $\exists H$ egyenes: K és S területét is felezi

$P \in S^1 \to$ irány $\longrightarrow \parallel$ egyenesek $\longrightarrow$ félsíkok

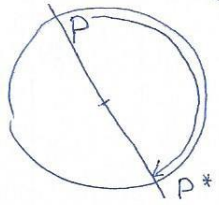
Előző: $\forall P \in S^1$ $\exists! H_P^{\geq 0}$: K-t felezi. (az egyértelműséget nem használjuk ki)

$f(P) = \text{ter}\left(H_P^{\geq 0} \cap S\right) - \text{ter}\left(H_P^{\leq 0} \cap S\right)$ $\longrightarrow$ mennyire nem felezik el a sajtot? igazán

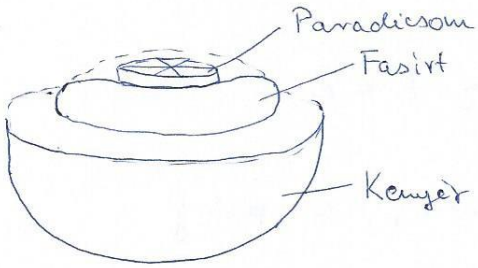
$f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $f(P) = -f(P^*)$

$\Rightarrow$ P és P^* között lesz 0: $\exists Q \in \widehat{PP^*}$, $f(Q) = 0$.

S^1-en kicsit odébb menve H_P csak kicsit nagy odébb

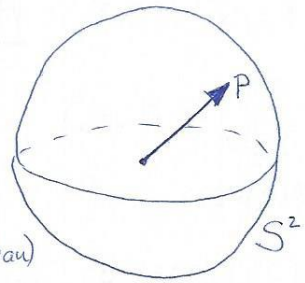


$\mathbb{R}^3$-beli szendvics felezése



$P, F, K \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \exists H$ sík, $H \subset \mathbb{R}^3$, H térfogatokat felez

Irány: $P \in S^2$



$\forall P\ \exists!\ H_P$, ami felezi K-t (eddigiekhez hasonlóan)

$f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos fasirtfelezési függvény

$f(P) = \text{térf}(H_P^{\geq 0} \cap F) - \text{térf}(H_P^{\leq 0} \cap F)$

$g: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(P) = \text{térf}(H_P^{\geq 0} \cap P) - \text{térf}(H_P^{\leq 0} \cap P)$ paradicsomfelezési függvény

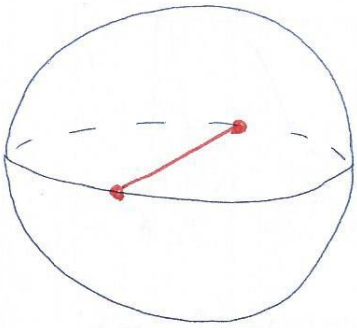
$\varphi = (f, g)$ $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos. $\varphi(P^*) = -\varphi(P)$

1. feltétel. $\varphi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos és $\varphi(P^*) = -\varphi(P) \Rightarrow \exists Q: \varphi(Q) = 0$.
(Borsuk–Ulam-tétel)

Ebből következik a hamburger eset. Biz. később.

Földgömb

Az Egyenlítőn $\exists P$: hőm(P) = hőm(P^*)
↓
hőmérs., folytonos



$h: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$h(P) = \text{hőm}(P) - \text{hőm}(P^*) \Rightarrow h(P^*) = -h(P)$

$\Rightarrow \exists Q: h(Q) = 0$.

Továbbfogalmazás: $\exists P \in S^2$: hőm(P) = hőm(P^*) hőmérséklet
légn(P) = légn(P^*) nyomás

Az 1. feltétel következménye.

2. feltétel. $\psi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos $\Rightarrow \exists P \in S^2: \psi(P) = \psi(P^*)$

Biz. később.

Állítás: Az 1. és a 2. feltétel ekvivalensek.

B: FT1 $\Rightarrow$ FT2.

Legyen $\varphi(P) := \psi(P) - \psi(P^*)$. Ekkor $\varphi(P) = -\varphi(P^*)$. FT1 szerint ebből $\exists Q: \varphi(Q) = 0 \Rightarrow \psi(Q) = \psi(Q^*)$. ✓

FT2 $\Rightarrow$ FT1.

Legyen $\psi(P) := \varphi(P)$. FT2 szerint $\exists Q: \varphi(Q) = \varphi(Q^*)$, de felt. szerint $\varphi(P) = -\varphi(P^*)$ $\forall P$ $\Rightarrow \varphi(Q) = 0$. ✓

Valahol ebben a tételben az van elrejtve, hogy $H_1(S^2 \setminus P)$ nemtriviális. A feltétel bizonyítása később.

<u>Definíció.</u> $f: S^1 \longrightarrow S^1$ folytonos függvény foka $\deg f \in \mathbb{Z}$:

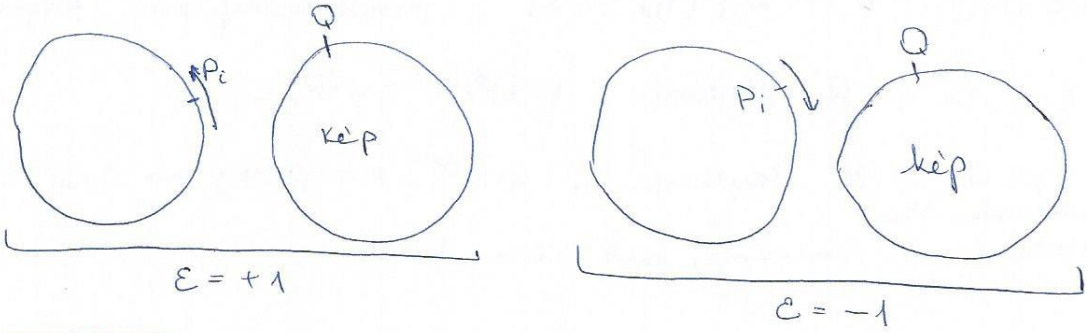
$$\deg f = \sum_{\substack{P_i \\ f(P_i)=Q}} \varepsilon(P_i),$$

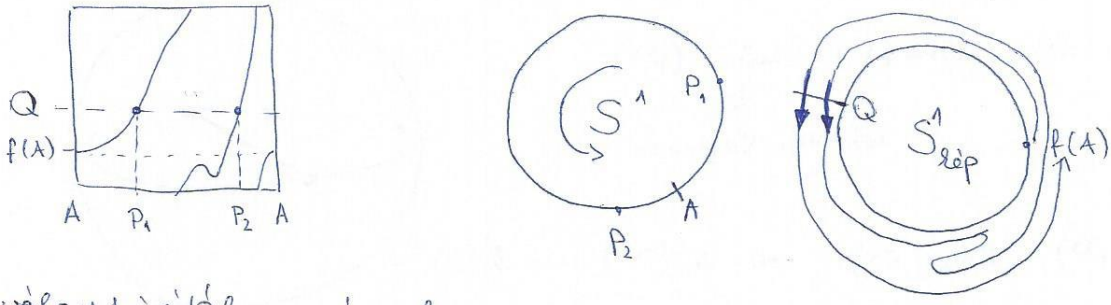
ahol Q reguláris érték, ε pedig az átmenet iránya.

Azaz $\nexists P: f(P)=Q$ és $f'(P)=0$. (IH a def. egyelőre függ Q-tól, de mindjárt megértik, hogy valójából nem.)

Ha $f'(P_i) > 0 \longrightarrow$ pozitív irányú átmenet $\longrightarrow \varepsilon(P_i) = +1$

$f'(P_i) < 0 \longrightarrow$ negatív irányú átmenet $\longrightarrow \varepsilon(P_i) = -1$





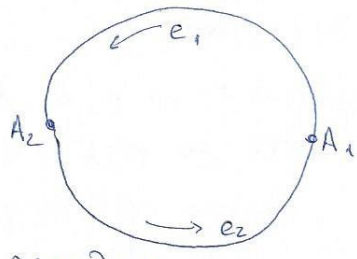
(Q választásától való függetlenség (nem teljes precizitással): ha a függvény „szép", mondjuk 2× diffható, ill. sehol nem megy át ∞ sokszor, akkor a függetlenség évszerű.)

A deg arról szól, hogy mely utak deformálhatók át egymásba folytonosan (mint egy csomó egy szál fonál).

<u>Megjegyzés.</u> $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$$H_0 = \mathbb{Z}^2 / \operatorname{im} \partial = \mathbb{Z}^2 / \langle A_2 = A_1 \rangle \approx \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \ker \partial / 0 = \mathbb{Z}\langle e_1 + e_2 \rangle \approx \mathbb{Z}$$



$\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} \partial_1 = 1$,

$\partial_1 : \mathbb{Z}\langle e_1, e_2 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle A_1, A_2 \rangle$

Megjegyzés: terek és folytonos leképezések $\rightsquigarrow$ csoportok és csoportmorf.

n. biz.

$$X \rightsquigarrow H_n(X)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow H_n(X) \xrightarrow[H_n f]{} H_n(Y)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} H_n(X) \arrow[r, "H_n f"'] \arrow[rr, bend right, "H_n(g\circ f) = H_n g \circ H_n f"'] & H_n(Y) \arrow[r, "H_n f"'] & H_n(Z) \end{tikzcd}$$

$$f : S^1 \longrightarrow S^1 \rightsquigarrow \underbrace{H_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow[H_1 f]{} \underbrace{H_1(S^1)}_{\mathbb{Z}}$$

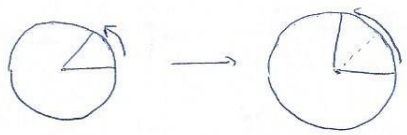
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Egyetlen ilyen csoportmorfizmus van: $n \longmapsto d\cdot n \quad (d \in \mathbb{Z})$

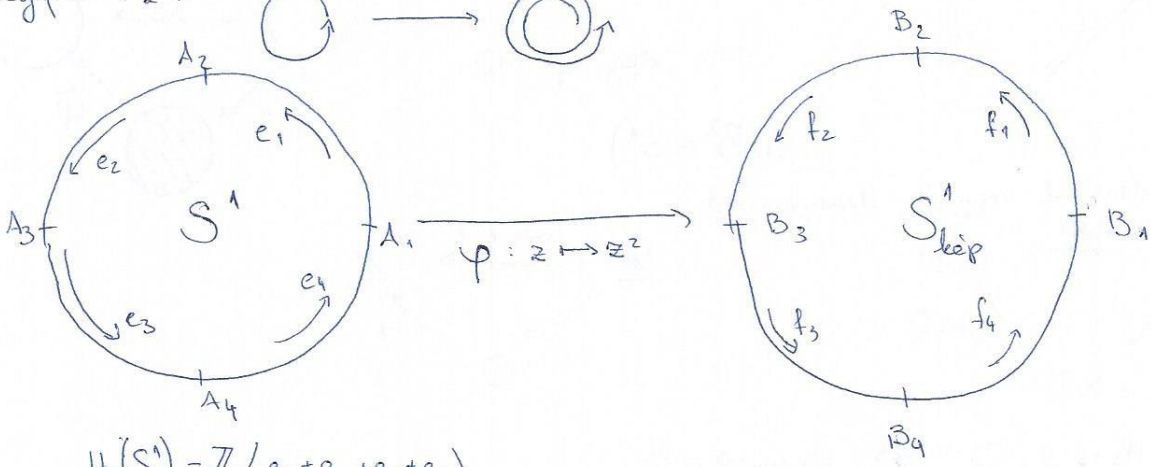
Épp a deg definíciója miatt $H_1 f = (\deg f \cdot)$

Példa. $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$

$z = \operatorname{cis}(\alpha) \longmapsto z^2 = \operatorname{cis}(2\alpha)$ dupla sebesség



$\deg \varphi = +2$:



$H_1(S^1) = \mathbb{Z}\langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle$

$H_1(S^1_{kép}) = \mathbb{Z}\langle f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \rangle$

generátor $= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \xmapsto{\varphi} 2\cdot(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = 2\cdot \text{gen}_{kép}$

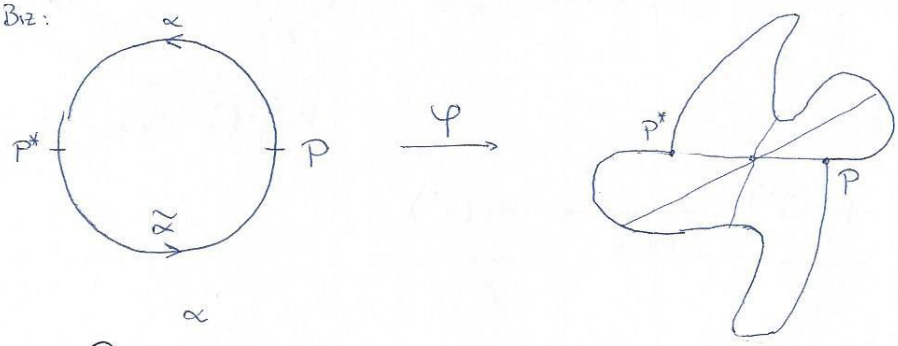
$A_1 \longrightarrow B_1$	$e_1 \longrightarrow f_1 + f_2$
$A_2 \longrightarrow B_3$	$e_2 \longrightarrow f_3 + f_4$
$A_3 \longrightarrow B_1$	$e_3 \longrightarrow f_1 + f_2$
$A_4 \longrightarrow B_3$	$e_4 \longrightarrow f_3 + f_4$

Most lépéseket teszünk a Borsuk – Ulam-tétel felé.

1. lemma. $\varphi : S^1 \to S^1$, $\varphi(P^*) = -\varphi(P)$ $\Rightarrow$ deg φ páratlan.

Ez azt jelenti, hogy csak a $\widehat{PP^*}$ íven határozhatjuk meg az értékeket, a többi a páratlanság miatt következik.

Biz:



$$P \xrightarrow{\alpha} P^* \qquad f(P) \xrightarrow[n+\frac{1}{2}\ \text{csavarodás}]{} -f(P)$$

$$P^* \xrightarrow{\tilde{\alpha}} P \qquad -f(P) \xrightarrow[n+\frac{1}{2}]{} f(P)$$

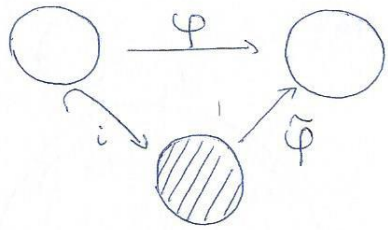
$2n+1$ csavarodás

(helyesebb precízebben.)

2. lemma.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & S^1 \\ & B^2 \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \Longrightarrow \deg \varphi = 0.$$

$(\partial B^2 = S^1)$



Biz. Hozzárendelünk egy H_1-diagramot.

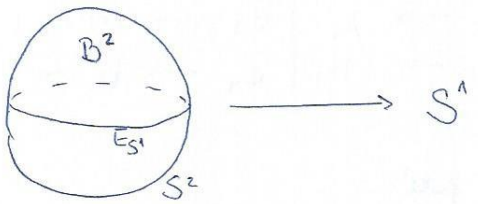
$$\begin{tikzcd} H_1 S^1 \arrow[rr, "H_1\varphi"] \arrow[dr, "H_1 i"'] & & H_1 S^1 \\ & H_1 B^2 \arrow[ur, "H_1\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, "(\deg \varphi \cdot)"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z} \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

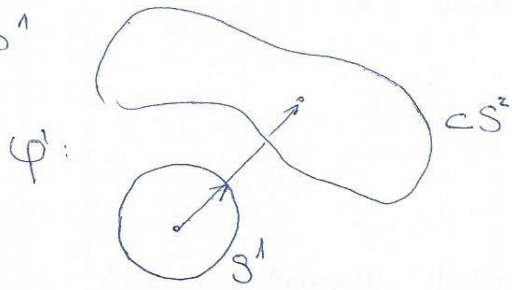
$\Rightarrow H_1\varphi = 0 \Rightarrow \deg \varphi = 0.$

Borsuk-Ulam bizonyítása.

$\lightning$ $\nexists Q : \varphi(Q) = 0.$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$ $\Rightarrow$ $\varphi'(P) = \dfrac{\varphi(P)}{|\varphi(P)|}$ értelmes:

csak az irányt nézzük $\Rightarrow$ $\varphi' : S^2 \xrightarrow{\varphi'} S^1$





A páratlanság megmarad, ha megszorítunk az egyenlítőre: $E_{S^1} \xrightarrow{\varphi'|_{E_{S^1}}} S^1$

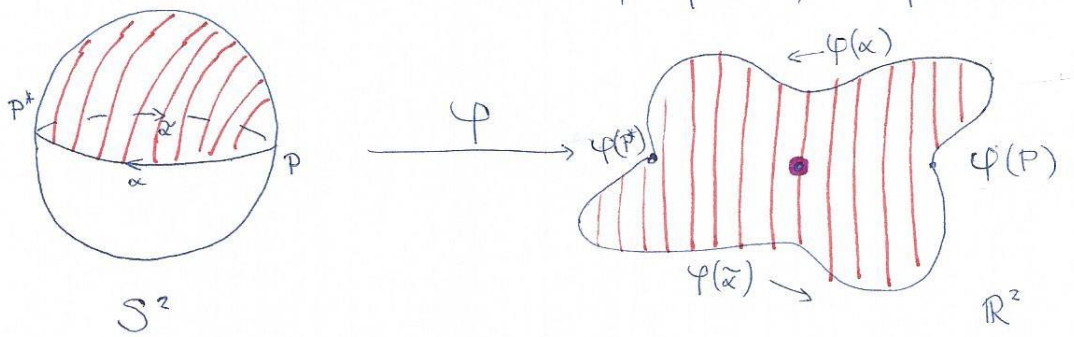
$\Rightarrow \deg\left(\varphi|_{E_{S^1}}\right)$ páratlan az 1. lemma miatt.

φ' ugyanakkor kiterjeszthető B^2-re

$\Rightarrow$ 2. lemma miatt $\deg(\varphi'|_{E_{S^1}}) = 0$. $\lightning$ $\square$

Mellékeredményként kijött:

<u>Tétel</u>. $\nexists \varphi$ folytonos: $S^2 \xrightarrow{\varphi} S^1$, $\varphi(P^*) = -\varphi(P)$. $\square\uparrow$



Mivel a felső féltere kitölt S^2-n, $\mathbb{R}^2$-n a képe kitölt, így van olyan pont, aminek képe az origó lesz; épp ez bizonyítja BU-t.

— o —

<u>Definíció</u>. Nevezzük $A \subset S^1$ (ill. S^2) -t jónak, ha $P \in A \Rightarrow P^* \notin A$

<u>Állítás</u>. S^1 nem fedhető le 2 zárt jó halmazzal.

B: Ha $A \cap B \neq \emptyset \longrightarrow \exists P \in A \cap B \longrightarrow P^* \notin A, B \longrightarrow$ nincs lefedve $\lightning$

Ha $A \cap B = \emptyset \longrightarrow S^1 = A \sqcup B$ zárt halmaz.

$\left.\begin{array}{l} H_0(A \sqcup B) \geq 2, \text{ mert nem lehet összefüggő} \\ H_0 S^1 = 1 \end{array}\right\} \lightning$ $\square$

<u>Tétel</u>. S^2 nem fedhető le 3 jó zárt halmazzal.
(Lusternik – Schnirelman – Borsuk)

B: $\lightning$ A_1, A_2, A_3 jó, zárt és $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

IH nem lehet pont azt csinálni, mint az előbb.

Legyen $f_i(P) =$ távolság (P, A_i). Kompaktság miatt $f_i(P) = 0 \Leftrightarrow P \in A_i$.

$\psi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(P) = \big(f_1(P) - f_3(P),\ f_2(P) - f_3(P)\big)$

A 2. feltétel szerint $\exists Q \in S^2$: $\psi(Q) = \psi(Q^*)$

$i = 1, 2$: $f_i(Q) - f_3(Q) = f_i(Q^*) - f_3(Q^*)$

$\longrightarrow f_i(Q) - f_i(Q^*) = f_3(Q) - f_3(Q^*)$

$\Rightarrow f_1(Q) - f_1(Q^*) = f_2(Q) - f_2(Q^*) = f_3(Q) - f_3(Q^*)$.

Tekintsük továbbra is ugyanezt a Q-t!

$Q \in A_i \longrightarrow Q^* \notin A_i \longrightarrow Q^* \in A_j$ $(j \neq i) \longrightarrow Q \notin A_j$

$$0 > -\underbrace{f_j(Q)}_{>0} = \underbrace{f_i(Q)}_{0} - f_j(Q) = \underbrace{f_i(Q^*)}_{>0} - \underbrace{f_j(Q^*)}_{0} > 0 \quad \lightning$$

$\square$