görbe hossza $\int_a^b |g'|\, dt$ $\quad g: [a,b] \to \mathbb{R}^p$, g_j diffható, g_j' R-intható

vonalintegrál / munkaintegrál $\int_g \langle f, dx \rangle = \lim_F \sum_i \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle \in \mathbb{R}$ $\quad f: g([a,b]) \to \mathbb{R}^p$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}^p$

vonalintegrál $\int_g h\, dx_j = \int_a^b (h \circ g)\, dg_j \in \mathbb{R}$ $\quad h: g([a,b]) \to \mathbb{R}$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}^p$

$\int_g \langle f, dx \rangle = \sum_{j=1}^p \int_g f_j\, dx_j$, ha a summában szereplő vonalintegrálok léteznek. $\quad f: g([a,b]) \to \mathbb{R}^p$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}^p$

[Mnemonik: $\int_g \langle f, dx \rangle$ „=" $\sum \int f_j dx_j$ „=" $\int (f_1 dx_1 + \ldots + f_p dx_p)$]

$\int_g \langle f, dx \rangle = \sum_{j=1}^p \int_a^b (f_j \circ g)\, g_j'\, dt$, $\quad$ f folyt, g diffható és a komp. der. intható $\quad f: g([a,b]) \to \mathbb{R}^p$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}^p$

primitív függvény: $(D_1 F, \ldots, D_p F) = (f_1, \ldots, f_p)$,
$\Updownarrow$
$F' = f$
$f: G \to \mathbb{R}^p$, $F: G \to \mathbb{R}$, G nyílt $\mathbb{R}^p$-ben

Newton–Leibniz $\int_g \langle f, dx \rangle = F(g(b)) - F(g(a))$ $\quad g: [a,b] \to G$ folyt. rekt., $f: G \to \mathbb{R}^p$ folyt., $F: G \to \mathbb{R}$ prim. fv.

f-nek van prim. fv.-e G-n $\iff \int_g \langle f, dx \rangle = 0$ $\forall g: [a,b] \to G$ folyt. diff. és zártra.
(elég zárt töröttvonalakra)

f diffható és van prim fv.-e G-n $\Rightarrow \forall x \in G$-re $D_i f_j = D_j f_i(x)$ (a Jacobi szimmetrikus)

Fordítva csak lokális primitív függvényt ad. Ekvivalencia igaz konvex nyílt G-re.
(ill. egysz. ö.f.-re)

Triviális becslés: $\left| \int_\gamma \langle f, dx \rangle \right| \leq K \cdot s$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^p$, $f: \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^p$, $K = \sup |f| \in \mathbb{R}$, $s = \gamma$ ívhossza

Green: $\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_\gamma f\, dy$

$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_\gamma f\, dx$

$G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, A a γ által hat. tartomány
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe, rektifikálható, poz. irány.
$\frac{\partial f}{\partial x}$ ill. $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ és folyt. cl A-n

ívhossz szerinti integrál $\int_\gamma h\, ds = \lim_F \sum_i h(\gamma(c_i))\, |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^p$, $h: \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$

$\int_\gamma h\, ds = \int_a^b (h \circ \gamma)(t) \cdot |\gamma'(t)|\, dt$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^p$ szak. folyt diff., $h: \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ folytonos

Green-tétel
Newton-Leibniz $p=2$-re:

$$\int_A f' \, dx \, dy = \int_\gamma f \cdot n \, ds$$

$f: clA \to \mathbb{R}^p$ folytdif
n a külső normális
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$
poz. ir. egyszt. zárt görbe
A a határolt tart

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{|g'(t)|} \cdot \left(g_2'(t), g_1'(t)\right)$$

---

paraméterezett felület: $f: A \to \mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{J}_2$

---

f felszíne: $\int_A |D_1 f \times D_2 f| \, dx \, dy$

$f: A \to \mathbb{R}^p$, $(A \in \mathcal{J}_2)$ param. felület
$|a \times b| := \sqrt{|a|^2 |b|^2 - \langle a, b\rangle^2}$

Forgástest felszíne: $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ folyt. diffható
$g(x,t) = (x, f(x)\cos t, f(x)\sin t)$
$x \in [a,b]$, $t \in [0, 2\pi]$

Függvénygrafikon felszíne: $\int_A \sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2} \, dx \, dy$

$A \subset \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{J}_2$
$f: A \to \mathbb{R}$ folyt. diffható
graph f a kanonikus leképezéssel param.

---

felszíni integrál $\int_{g(A)} f \, dF = \int_A (f \circ g) |D_1 g \times D_2 g| \, dx \, dy$

$A \subset \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{J}_2$
$g: A \to \mathbb{R}^p$ folyt. diffható
$f: g(A) \to \mathbb{R}$

Newton-Leibniz-formula
($p=3$)

$$\int_A f' \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial A} f \cdot n \, dF$$

∂A véges sok folytdif felület uniója $\mathbb{R}^p$-ben,
$f: A \to \mathbb{R}^3$ folytdiff,
$A \subset \mathbb{R}^3$

Divergenciatétel
(Gauss–Osztrogradszkij)

$$\int_{\partial A} \langle f, n \rangle \, dF = \int_A \operatorname{div} f \, dx \, dy \, dz$$

$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$
$f: cl\, A \to \mathbb{R}^3$

Stokes-tétel

$$\int_{\partial A} (f \times n) \, dF = -\int_A (\operatorname{rot} f) \, dx \, dy \, dz$$

$\operatorname{rot} f = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$
