BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
1. gyakorlat: szept. 8.

1. (1) Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előállítható (szorzatként) az $(1,2)$, $(2,3)$, $\dots$, $(n-1,n)$ permutációk segítségével.
   (2) Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előállítható (szorzatként) az $(1,2)$ és az $(1,2,\dots,n)$ permutációk segítségével.

2. Igazoljuk, hogy a

$$SL_2(3) = \left\{ \pm\mathbf{1}\,,\ \pm\mathbf{i}\,,\ \pm\mathbf{j}\,,\ \pm\mathbf{k}\,,\ \frac{1}{2}(\pm\mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \right\}$$

2x2-es mátrixok a 3 elemű test felett

alakú kvaterniók (24 elemű) csoportot alkotnak a kvaterniószorzás műveletére. Hány másodrendű és hány negyedrendű elem van itt?

3. A 15-ös játékban előállítható-e a kövek természetes (növő) sorrendjéből a 2,1,3, 4, $\dots$, 14, 15 sorrend? Helyette: 1, 2, 3, ..., 13, 15, 14

4. Tekintsük azokat az $n \times n$-es alsóháromszög-mátrixokat, amelyeknek elemei a p elemű test elemei (p prím) és a főátlójuk mindegyik eleme 1.
   (1) Mutassuk meg, hogy a fenti mátrixok csoportot alkotnak a mátrixszorzásra.
   (2) Mi lehet ebben a csoportban egy elemnek a rendje?

5. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha G kommutatív csoport, akkor minden n egész számra és minden $a, b \in G$-re $(ab)^n = a^n b^n$.
   (b) Igazoljuk, hogy ha $\forall a, b \in G$-re $(ab)^2 = a^2 b^2$, akkor G kommutatív csoport.
   (c) Legyen $n > 2$ egész szám. Mutassuk meg, hogy van olyan ***nem kommutatív*** G csoport, amelyben $\forall a, b \in G$-re $(ab)^n = a^n b^n$ teljesül.
   (d) G-ben $a^2 = e \Rightarrow G$ kommutatív; (b') Ez nem általánosítható $a^n = e$-re, $n > 2$.

6. (a) Ha $a \in G$, akkor $o(a) = 2 \iff a = a^{-1}$ és $a \neq e$.
   (b) Mutassuk meg, hogy ha $|G|$ páros, akkor G-ben létezik másodrendű elem.
   (c) Legyen $|G|$ páros. Mutassuk meg, hogy G-ben a másodrendű elemek száma páratlan.
   (d) Minden csoportban a negyedrendű elemek száma páros (vagy végtelen).

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
2. gyakorlat: szept. 15.

1. Igaz-e, hogy ha egy (nem üres) H halmazon értelmezett asszociatív műveletre létezik balegységelem, és arra nézve minden elemnek van jobbinverze, akkor H csoport?

2. Legyen a $C \neq \emptyset$ halmazon értelmezett egy asszociatív művelet, amelyre teljesül, hogy minden $a, b \in C$-re az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenletnek is létezik megoldása. Mutassuk meg, hogy C csoport erre a műveletre.

3. Igazoljuk, hogy a G csoport pontosan akkor véges, ha csak véges sok részcsoportja van. Azaz ha G végtelen, akkor van végtelen sok részcsoportja.

4. Legyen p prím. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nek minden önmagától különböző részcsoportja véges.

5. Tegyük fel, hogy G csoport, k egész, $a \in G$ és a rendje n. Mennyi a^k rendje?

6. (a) Legyen n és $k \leq n$ pozitív egész. Mi annak a feltétele, hogy D_n-nek létezzék D_k-val izomorf részcsoportja?
   (b) Legyen n és $k \leq n$ pozitív egész. Mi annak a feltétele, hogy S_n-nek létezzék D_k-val izomorf részcsoportja?
   (c) Mutassuk meg, hogy S_5-nek létezik D_6-tal izomorf részcsoportja.
   (d) Legyen m és $k \leq 2^m$ pozitív egész. Mi annak a feltétele, hogy D_{2^m}-nek létezzék S_k-val izomorf részcsoportja?

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
3. gyakorlat: szept. 22.

1. Legyen $k \geqslant 3$ egész. Adjunk példát olyan G csoportra és abban olyan $H \leqslant G$ részcsoportra, amelynek az indexe k, és H nem normálosztó G-ben.

2. Határozzuk meg az összes olyan x elemet S_3-ban, amelyre $x^{-1}(1,2,3)x = (1,3,2)$ teljesül. Hány esik közülük A_3-ba?

3. **(a)** Határozzuk meg S_5 konjugáltosztályait és azok méretét.
(b) Határozzuk meg A_5 konjugáltosztályait és azok méretét.

4. Legyen G a racionális számok halmazának összes önmagára való bijektív leképezése; ekkor G csoport a kompozíció műveletére (ezt tudjuk). Jelölje a és b a következő elemeket G-ben: $(\forall\, x \in \mathbb{Q})\ x^a = x+1$, $x^b = 2x$. Mutassuk meg, hogy a $H = \langle a \rangle$ részcsoportra $b^{-1}Hb$ valódi része H-nak.

5. Legyen $k \leqslant n$. Mi az $(1, 2, \ldots, k)$ centralizátora S_n-ben?

6. Határozzuk meg az $X = \{(1,2), (1,2,3)\}$ részhalmaz normalizátorát S_5-ben.

7. Legyen H véges részcsoport G-ben és $a, b \in G$. Mutassuk meg, hogy $|aH \cap Hb|$ vagy nulla, vagy osztója $|H|$-nak.

8. Tegyük fel, hogy A és B is normálosztó a G csoportban, és $A \cap B = 1$. Mutassuk meg, hogy minden $a \in A$-ra és $b \in B$-re $ba = ab$.

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
4. gyakorlat: szept. 29.

$H \not\triangleleft S_3$, így a bal mellékosztályokat nem fogunk csoportot alkotni

1. Az S_3 csoportban határozzuk meg a $H = \{id, (1,2)\}$ részcsoport szerinti $(1,3)H$ és $(2,3)H$ mellékosztályok komplexusszorzatát.

„Csak arra való, hogy elvégeztünk évente egyszer egy komplexusszorzást."

2. Tegyük fel, hogy A és B véges részcsoportok G-ben.
   (a) Mutassuk meg, hogy a különböző, Ab alakú (ahol $b \in B$) mellékosztályok száma $|B : A \cap B|$.
   (b) Igazoljuk, hogy $|A \cdot B| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

3. Határozzuk meg a D_n diédercsoport centrumát.

4. Legyen $d \mid n$.
   (a) Mutassuk meg, hogy ha f – a szokásos módon – n-edrendű elforgatás D_n-ben, akkor $\langle f^d \rangle$ normálosztó D_n-ben.
   (b) Milyen (ismerős) csoporttal izomorf a $D_n/\langle f^{n/d} \rangle$ faktorcsoport?

5. (a) Bizonyítandó: ha $G/\mathrm{Z}(G)$ ciklikus, akkor G Abel-csoport (és így $G/\mathrm{Z}(G)$ a triviális egyelemű csoport).
   (b) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Aut}(G)$ nem lehet (a triviálistól különböző) páratlan rendű ciklikus csoport.

6. Tegyük föl, hogy $N \lhd G$ és $|G : N| = k$ véges. Igazoljuk, hogy (minden $a \in G$-re) $a^k \in N$.

7. Jelölje $\mathbb{Q}^+$ a racionális számok csoportját a közönséges összeadás műveletére ($\mathbb{Q}$ *additív csoportja*). Van-e ebben a csoportban a triviálison kívül véges indexű részcsoport? Ugyanez a kérdés $\mathbb{C}^\times$-re és $\mathbb{R}^\times$-re (a komplex, ill. valós számok *multiplikatív csoportja*, vagyis a nemnulla elemek csoportja a közönséges szorzás műveletére).

8. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}^+$ tetszőleges generátorrendszerének bármely elemét elhagyva is generátorrendszert kapunk, azaz: ha $X \subseteq \mathbb{Q}^+$, $a \in \mathbb{Q}^+$ és $\langle X, a \rangle = \mathbb{Q}^+$, akkor $\langle X \rangle = \mathbb{Q}^+$ is teljesül.

9. Határozzuk meg a ciklikus csoportok automorfizmuscsoportját (végesek esetén legalább azt, hogy hány automorfizmus van).

10. a) $\langle c \rangle$ ciklikus csoport, $|\langle c \rangle| = 100$. Adjunk meg valódi részcsoportokat!
    b) Mutassuk meg, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

1?. $H \leq G$, $H \not\triangleleft G \Rightarrow \exists a, b \in G : aH \cdot bH \neq cH$

„Persze ... es lehet, hogy nem igaz."

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
5. gyakorlat: okt. 6.

D_6

1. Adjuk meg D_6-nak egy olyan endomorfizmusát, amelyre nézve $\mathrm{Z}(\cancel{G})$ nem invariáns. $\psi(Z(D_6)) \not\subseteq Z(D_6)$, $\psi \in \mathrm{End}\, D_6$

2. Igazoljuk, hogy a ciklikus csoportoknak minden részcsoportja karakterisztikus.

3. (a) Határozzuk meg a D_n diédercsoport kommutátorrészcsoportját.
   (b) $D_n^{\mathrm{ab}} \cong ?$

4. (a) Határozzuk meg D_n automorfizmuscsoportját.
   (b) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Aut}(D_{4\cancel{8}})$ izomorf $D_{\cancel{8}4}$-cal.
   (c) Adjuk meg D_8 egy nem belső automorfizmusát.

5. Legyen p prím, és jelölje $\mathbb{Q}_p^+$ a p-hatvány nevezőjű törtként felírható racionális számok csoportját a közönséges összeadás műveletére. Határozzuk meg ennek a csoportnak az automorfizmusait és endomorfizmusait.

6. Igazoljuk a következő kommutátor azonosságokat: $[ab, c] = [a, c]^b \cdot [b, c]$, $[a, bc] = [a, c] \cdot [a, b]^c$. Mi következik ezekből, ha $G' \leqslant \mathrm{Z}(G)$?

7. Tegyük fel, hogy $[a, b]$ felcserélhető a-val is és b-vel is. Mutassuk meg, hogy ekkor (minden pozitív egész n kitevőre) $(ab)^n = a^n b^n \cdot [b, a]^{\binom{n}{2}}$.

8. Asszociatív-e az $[a, b]$ művelet?

9. Definiáljuk a hármas kommutátorokat a következőképpen: $[a, b, c] \stackrel{\text{def}}{=} [[a, b], c]$. Igazoljuk ezekre a következő azonosságot:

$$[a, b^{-1}, c]^b \cdot [b, c^{-1}, a]^c \cdot [c, a^{-1}, b]^a = 1.$$

Lie-algebrában levő Jacobi-azonosságra hajaz

„Ez olyasmire nosztalgia, ami még nem szerepelt az anyagban. Ilyen időutazásos nosztalgia."

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
6. gyakorlat: okt. 13.

1. $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)| = ?$

2. Mely n-ekre állítható elő D_n két kisebb rendű csoport direkt szorzataként? (Részeredményeket is szívesen látok.)

3. (a) Írjuk fel a $\mathbb{Q}^\times$ csoportot „minél több" nemtriviális csoport (diszkrét) direkt szorzataként.

   (b) Felírható-e a $\mathbb{Q}^+$ csoport két nemtriviális csoport direkt szorzataként?

4. Egy G csoportot *Hopf-típusúnak* nevezünk, ha nincs olyan nemtriviális N normálosztója, amelyre a G/N faktorcsoport izomorf G-vel. Melyek Hopf-típusúak a következő csoportok közül: $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^\times$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^\times$?

5. (a) Melyik ismert csoporttal izomorf egy szabályos tetraéder *szimmetriacsoportja* (a tetraédert önmagára képező egybevágósági transzformációk csoportja a kompozíció műveletére)?

   (b) Igazoljuk, hogy a kocka szimmetriacsoportja izomorf $S_4 \times \mathbb{Z}_2$-vel.

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
1. ZH: okt. 20.

Minden feladat 1 *pontot ér, az adható részpontszámok* 0.1 *többszörösei. A dolgozat osztályzata a pontszámok (kerekítés nélküli) összege.*

---

1. Tegyük föl, hogy a G csoport centruma triviális: $\mathrm{Z}(G) = 1$.
Mutassa meg, hogy akkor G automorfizmuscsoportjának a centruma is triviális, azaz $\mathrm{Z}(\mathrm{Aut}(G)) = 1$. 1p

2. Legyen $n \geqslant 5$. Mutassa meg, hogy S_n-nek egyetlen nemtriviális normálosztója van, A_n. 0,7p

3. Legyen p prímszám, és $|G| = p^k > p$. Igazolja, hogy $|G : G'| \neq p$. 0p

4. Legyen G véges csoport. Bizonyítandó: 0,5p
   (a) Ha G-nek egyetlen maximális részcsoportja van, akkor G prímhatvány rendű ciklikus csoport.
   (b) G összes különböző maximális részcsoportjainak száma pontosan akkor kettő, ha G ciklikus és $|G| = p^a \cdot q^b$, ahol p és q különböző prímszámok és $a\,,\, b \geqslant 1$.

5. Hány 9-edrendű elem van $Z_{18} \times Z_{27} \times Z_6$-ban? 1p

6. Bizonyítandó: Ha a $G \neq 1$ csoportban a kommutátorképzés művelete asszociatív, akkor G-nek létezik Abel-féle $N \neq 1$ normálosztója. 0,7p

7. Ha $t_1\,,\, t_2\,,\, t_3\,,\, \ldots\,,\, t_{n-2}$ tetszőleges transzpozíciók S_n-ben, akkor 1p
$$\langle t_1\,,\, t_2\,,\, t_3\,,\, \ldots\,,\, t_{n-2}\rangle \neq S_n.$$

Σ 4,9p

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
8. gyakorlat: nov. 3.

1. Készítsük el az elemrendek statisztikáját a $Z_3 \rtimes Z_4$ csoportban, ahol Z_4 (egyik) negyedrendű elemének a Z_3 másodrendű automorfizmusa felel meg. (Milyen rendű elemből hány darab van.)

2. Határozzuk meg a következő csoportok centrumát, kommutátorrészcsoportját és automorfizmuscsoportját: $Z_3 \rtimes Z_4$, $Z_q \rtimes Z_p$ (ahol p és q prím, és $p \mid q-1$).
↳ ami ea-n volt

3. (a) Mutassuk meg, hogy minden $5 \cdot 7 \cdot 19$ rendű csoport ciklikus.

(b) Legyenek $p < q < r$ prímek. Mi annak a feltétele, hogy minden pqr rendű csoport ciklikus legyen?

4. (a) Jelölje G egy kocka *szimmetriacsoportját* (a kockát önmagára képező egybevágósági transzformációk csoportját a kompozíció műveletére). Mennyi lesz $|G|$?

(b) Igazoljuk, hogy G izomorf $S_4 \times Z_2$-vel.
Pótfeladat: Petersen szimmetriacsoportja.

5. (a) Tegyük föl, hogy G véges csoport, és a 2-Sylow részcsoportjai ciklikusak. Mutassuk meg, hogy G-nek létezik 2-indexű normálosztója.

(b) A fenti normálosztó karakterisztikus.
[*Útm.: ha egy A csoportban $B \lhd A$ és $C \lhd A$, akkor $(A/B) \times (A/C)$-nek létezik $A/B \cap C$-vel izomorf részcsoportja.*]

(c) Tegyük föl, hogy G véges csoport, és a 2-Sylow részcsoportjai ciklikusak. Mutassuk meg, hogy G-ben létezik olyan páratlan rendű normálosztó, amelynek az indexe 2-hatvány.

Def. $O_p(G)$: tartalmazásra legnagyobb p-hatvány rendű normálosztó G-ben
($\subseteq$) ($|G| < \infty$)

6. $H \leq G$, $N \lhd G \Rightarrow H \cdot N \leq G$ (ea)

7. $A, B \lhd G \Rightarrow A \cdot B \lhd G$ (G.-ből)

8. X, Y véges, $X, Y \leq G \Rightarrow |X \cdot Y| = \dfrac{|X| \cdot |Y|}{|X \cap Y|}$ (gy)

9. 6, 7, 8. $\Rightarrow \exists O_p(G)$.

10. $O_p(G) = \bigcap_{R \in Syl_p G} R$

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
9. gyakorlat: nov. 10.

1. Mutassuk meg, hogy a $GL_3(2)$ csoport 2-tranzitív $\mathbb{F}_2^3$ nemnulla vektorainak a halmazán.

2. Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban létezik 6-indexű részcsoport és 7-indexű részcsoport is, akkor az a csoport nem lehet egyszerű.

3. Legyen $A \leqslant S_n$ egy Abel-féle részcsoport, és tegyük fel, hogy A tranzitív. Bizonyítandó: az egységelemtől eltekintve A semelyik elemének nincs fixpontja. (Azaz A reguláris.)

4. Legyen T test, és tekintsük T-nek azokat az
$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$
leképezéseit, amelyekre $a, b, c, d \in T$ és $ad - bc \neq 0$.
   (a) Bővítsük a T halmazt egy ∞-vel jelölt elemmel, legyen $T \cup \{\infty\} = \Omega$. Mutassuk meg, hogy — a 0-val való osztás eredményét ∞-nek, a ∞-nel való osztás eredményét pedig 0-nak definiálva — a fenti törtkifejezésekkel értelmezett leképezések egy L permutációcsoportot adnak az Ω halmazon.
   (b) Határozzuk meg az L_∞ stabilizátort és igazoljuk, hogy L 3-tranzitív.

5. Legyen $G = \langle (1,2,3,4,5), (1,6)(2,3)(4,5) \rangle$.
   (a) Mutassuk meg, hogy G tranzitív az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmazon.
   (b) Igazoljuk, hogy $(3,5)(4,6), (1,4)(5,6) \in G_2$, ezért G 2-tranzitív.
11.24. *(c) Mutassuk meg, hogy G izomorf S_5-tel.

G 3-tranzitív $\Leftrightarrow$ 1) G tranz. Ω-n
Ω-n 2) G_α 2-tranz. $\Omega \setminus \{\alpha\}$-n

$$a_1,\ b_1,\ c_1 \overset{1)}{\longleftrightarrow} \alpha,\ v,\ w \ \updownarrow 2$$
$$a_2,\ b_2,\ c_2 \underset{1)}{\longleftrightarrow} \alpha,\ v',\ w'$$

— o —

4.: Ha $x = -\frac{d}{c}$ $\longrightarrow$ gond lesz.
0-val osztás ∞, ∞-nel osztás 0

$$\frac{a\infty+b}{c\infty+d} := \frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c}$$ (meg lehet gondolni, hogy ez tt lehet)

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
10. gyakorlat: nov. 17.

1. Jelölje A_∞ az $\mathbb{N}$ összes olyan permutációjának a csoportját, amelyek csak véges sok elemet mozgatnak, és a megfelelő véges halmazon párosak. Mutassuk meg, hogy A_∞ egyszerű csoport. Hint: kapcsolat A_n-nel.

2. Legyen K test.
   (a) Határozzuk meg a 2×2-es és a 3×3-as, K feletti nemnulla determinánsú felsőháromszögmátrixok csoportjának (esetleg általánosan, az $n \times n$-eseknek) a kommutátorrészcsoportját. Ki lehet számolni — elég becslést adni
   (b) Határozzuk meg a 2×2-es és a 3×3-as, K feletti felső egység-háromszögmátrixok csoportjának (esetleg általánosan, az $n \times n$-eseknek) a kommutátorrészcsoportját. $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ — elég becslést adni

3. Legyen A tetszőleges csoport, és jelölje $f(A)$ azt a $Z_2 \ltimes (A \times A)$ szemidirekt szorzatot, amelynél Z_2 másodrendű elemének az $(x, y) \mapsto (y, x)$ automorfizmus felel meg. — ne csak becsüljünk!
   (a) (Speciális kommutátorok kiszámításával) igazoljuk, hogy $f(A)'$-nek létezik A-val izomorf faktorcsoportja (homomorf képe). Nem kell $\forall$ kommutátort kiszámolni, csak bizonyosokat, majd megmutatni, hogy az ezek által generáltak faktorizáció az abelianizáció.
   (b) Tetszőleges k pozitív egészre létezik olyan feloldható G csoport, amelyre $d(G) = k$.

4. Legyen G véges csoport, a $|G|$ legkisebb prímosztóját jelölje p. Mutassuk meg, hogy ha egy részcsoportnak az indexe ez a p, akkor az a részcsoport normálosztó. nem Sylow — a $p=2$-re vonatkozót általánosítja.

5. (a) Minden $\neq 1$ feloldható csoportnak létezik $N \neq 1$ Abel-féle normálosztója.
   (b) Mi annak a feltétele, hogy egy véges Abel-csoportnak ne létezzen valódi karakterisztikus részcsoportja?
   (c) Minden feloldható véges csoportnak létezik olyan $N \neq 1$ normálosztója, ami elemi Abel-féle p-csoport, alkalmas p prímmel.

4.) $Z_2 \ltimes (A \times A)$

$Z_2 = \langle m \rangle$ $\quad 1 \longmapsto id$, $\quad m \longmapsto ((x,y) \mapsto (y,x))$ ez nyilván automorfizmus és másodrendű

4a) hint: olyan párok, amiben az egyik tag egységelem

Ny: $\varphi: G \longrightarrow H$
$\Rightarrow G' \xrightarrow{\varphi} H'$

5.) Hint: $\triangleleft$ és char tranzitív kapcsolatára vonatkozó állítások használata.

12.02. 6.) $A, B \leq G$ $\quad [A,B] = \langle [a,b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ ferde kommutátorres. $(G' = [G,G])$
Bbe. $[A,B] \triangleleft \langle A, B \rangle$ (ennél több nyilván nem várható)

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
11. gyakorlat: nov. 24.

1. (Diciklikus csoportok.) Legyen $n > 1$ egész, és legyen

$$G = \langle a\,,\, b \mid a^{2n} = 1\,,\, b^2 = a^n\,,\, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle.$$

átalánosított ált. kv.-csoport

(a) Határozzuk meg G rendjét.

(b) Készítsük el az elemrendek statisztikáját G-ben.

elnap. **2.** Határozzuk meg a $G = \langle a\,,\, b \mid ab^2 = b^3a, ba^2 = a^3b\rangle$ csoport rendjét.
[segítség: nagyon kicsi ... ☺]

trükkös

3. Legyen $F = \langle x\,,\, y\rangle$ szabad csoport az x, y szabad generátorokkal. Minden n pozitív egészre legyen $z_n = x^{-n}yx^n$. Mutassuk meg, hogy

$$\langle z_1, z_2, z_3, \ldots\rangle \cong F_\infty. \qquad \Rightarrow \quad F_\infty \cong H \leq F_2$$

4. Jelölje az n (véges) rangú szabad csoportot F_n.

(a) Határozzuk meg (izomorfia erejéig) az F_n/F_n' faktorcsoportot.

(b) Igazoljuk: $F_n \cong F_k \iff n = k$.

szabad Abel-csoport $\underbrace{\mathbb{Z}_\infty \times \ldots \times \mathbb{Z}_\infty}_{n \text{ db direkt faktor}}$

Hint: $F_n \twoheadrightarrow F_n/F_n'$

5. Mutassuk meg, hogy

$$\langle a\,,\, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1\rangle \cong A_4.$$

$\langle X\rangle = F$, G tetsz.
$\to \exists!\ X \to G$ leképezés
(mint a leképezések előírhatósága vektorterekben $\to$ azok szabadak)

elnap. **6.** Mutassuk meg, hogy

$$\langle a\,,\, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^3 = 1\rangle \cong S_4.$$

elnap. ***7.** Legyen G véges csoport, $A \leqslant G$, $|A| = p^\ell$ (p prím). Bizonyítandó: ha $p^k \geqslant p^\ell$, akkor az A-t tartalmazó p^k-rendű részcsoportok száma $\equiv 1 \pmod p$.

ea-n elhangzottat általánosítja
(Lehet vagy az ottani bizonyítást kiterjeszteni, (orbit-stabilitátor-tétel)
vagy indukálni. $L \lneqq H$, $|H| = p^m \to L \overset{p}{\triangleleft} L_1 \leqq H$)
bz. Sylowszal, $H/Z(H) \geq L/Z(H)$, ind. a rendre

Áll. $F_n = \langle Y\rangle$, $|Y| = n$, $F_\infty \to Y$ szabad generátorrendszer.
nehéz! a reziduálisan végesség következménye

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz
12. gyakorlat: dec. 1.

Legyen

$$D_{2^{n-1}} = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \ (n \geqslant 3),$$
$$Q_{2^n} = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \ (n \geqslant 3),$$
$$M_n(2) = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{n-2}} \rangle \ (n \geqslant 4),$$
$$SD_n = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}} \rangle \ (n \geqslant 4).$$

1. Legyen $|R| = p^n$, p prím. Mutassuk meg, hogy $\Phi(R) = R' \cdot \langle x^p \mid x \in R \rangle$.
2. Határozzuk meg a fenti csoportok kommutátorrészcsoportját és Frattini-részcsoportját.
3. Mi a fenti csoportok centruma?
4. Elemrendek statisztikája?
5. Igazoljuk, hogy a fenti csoportok mindegyikének három maximális részcsoportja van. Milyen csoportok ezek?
(Általában: ha $|R| = p^n$, p prím, és $|R/\Phi(R)| = p^k$, akkor R maximális részcsoportjainak a száma $\dfrac{p^k - 1}{p - 1}$.)

BSc algebra 3, matematikus szakirány — 2015. ősz

2. ZH: dec. 7.

Minden feladat 1 pontot ér, az adható részpontszámok 0.1 többszörösei. A dolgozat osztályzata a pontszámok (kerekítés nélküli) összege.

---

1. Tegyük föl, hogy $|G| = 3 \cdot 13 \cdot 71$. Mutassa meg, hogy létezik G-nek olyan N normálosztója, amelyre $|G : N| = 3$.

2. Legyen $G \leqslant S_n$ egy tranzitív permutációcsoport, amelyre $\mathrm{Z}(G) \neq 1$. Bizonyítandó: ha $1 \neq z \in \mathrm{Z}(G)$, akkor z-nek nincs fixpontja.

3. Tegyük föl, hogy $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$. Mutassa meg, hogy G feloldható.

4. Tegyük föl, hogy $G/\mathrm{Z}(G)$ Abel-csoport.
Igazolja, hogy minden a elemre $\mathrm{C}_G(a) \lhd G$.

5. Egy G csoportnak van k-elemű generátorrendszere. Bizonyítsa be, hogy G-nek legfeljebb $(n!)^k$ olyan normálosztója van, amelynek az indexe legfeljebb n.

6. A Q_{2^n} általánosított kvaterniócsoportban ($n \geqslant 4$) hány konjugált osztálya van a negyedrendű részcsoportoknak? (Azaz: legfeljebb hány negyedrendű részcsoportot találhatunk úgy, hogy semelyik kettő nem konjugáltja egymásnak?)

7. Legyen $A =< a_1 > \times < a_2 >$ kilencedrendű elemi Abel-csoport, $B =< b >$ pedig nyolcadrendű ciklikus csoport. Jelölje ψ azt az automorfizmusát A-nak, amelynél $a_1^\psi = a_1 a_2$ és $a_2^\psi = a_1^2 a_2$. Hasonlóan legyen η az az automorfizmus, amelynél $a_1^\eta = a_2^2$ és $a_2^\eta = a_1$. Jelölje G_1, illetve G_2 az A-nak B-vel képezett $B \ltimes A$ szemidirekt szorzatait, ahol b-nek a ψ, illetve η automorfizmus felel meg. Izomorfak-e egymással a G_1 és G_2 csoportok?