8:15 – 9:00, 9:10 – 9:55

Besenyei Ádám, badam@cs.elte.hu, abesenyei.web.elte.hu

Írásbeli vizsga: sok rövid kérdés, 1 bizonyítás, 2 tétel - defi - témazáró - feladat (zb)

Jegyzet, irodalom: Besenyei – Kovornik – Simon: Parcdiff (elektronikus jegyzet)

Simon – Badertscher: Parcdiff (könyv)

Tematika: fizikai példák, PDE osztályozása } bevezetés

disztribúcióelmélet (a disztribúció általánosított fv.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1$$

Dirac-delta, ez egy disztribúció)

↓

kaucsi problémák megoldása

Szobolev-féle fokozat (gyenge értelemben deriválható függvény)

↓

gyenge megoldások

Alapfogalmak

2017.02.16

Jelölések: ∂_t, ∂_x lesz ∂_1, ∂_2 helyett

∂_t^2 lesz ∂_{tt} helyett

Def. Multiindex: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ $\forall j = 1, \dots, n$.

$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$, spec. $\partial^{(0,\dots,0)} f = f$

Def. Multiindex abszolútértéke: $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, a deriválás rendje.

A jelölés Laurent Schwartztól származik.

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (nyílt összefüggő) tartomány. (A tartomány itt act. korlátos is)

$F: \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ adott fv. Keresendő $u: \Omega \to \mathbb{R}$, amire

$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n^m u(x)) = 0$ $\forall x \in \Omega$, ahol $m > 0$ egész az egyenlet rendje (a legmagasabb rendű derivált rendje)

Def. Klasszikus mo.: u annyiszor diffható, amennyi az egy. rendje (m).

(Később lesz: gyenge megoldás, ott még folyt. se kell.)

Példák

Kvázilineáris PDE

$$\overbrace{\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\underbrace{x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n^{m-1} u(x)}_{\text{itt csak legfeljebb } (m-1)\text{-edrendű deriváltak szerepelnek}})}^{\text{főrész: itt van max. rendű } \partial} \cdot \partial^\alpha u =$$

$$= f(\overbrace{x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n^{m-1} u(x)})$$

Szemilineáris PDE: főrészében lineáris

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha u(x) = f(\underbrace{x, u(x), \dots, \partial_n^{m-1} u(x)}_{\text{rend} \leq m-1})$$

Lineáris PDE: $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \cdot \partial^\alpha u(x) = f(x)$

Állandó együtthatós lineáris PDE: $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha u(x) = f(x)$,

ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$

Kérdések

(1) egzisztencia: van-e megoldás egy adott frontban?

(2) unicitás: a mo. egyértelmű-e?

(3) folytonos függés az adatokból: együtthatók, f, ... (stabilitás)

↳ mérési hibák miatt fontos

Ha (1), (2), (3) teljesül: korrekt kitűzésű feladat.

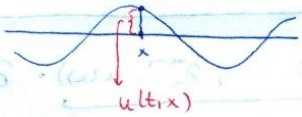
Gyakran társulnak feltételek az egyenletekhez: **mellékfeltételek**:

- Peremfeltétel: a megoldás ~~határait~~ értékeit előírjuk Ω peremén;
  a megoldás valamilyen deriváltját írjuk elő $\partial\Omega$-n
- Kezdeti feltétel: időfüggő feladatnál.
  A mo. értékét vagy deriváltját a kezdeti időpontban írjuk elő.
- Vegyes feltétel: kezdeti feltétel és peremfeltétel is van.

Így kapjuk:
- peremérték-feladat
- kezdetiérték-feladat (Cauchy-feladat)
- vegyes feladat

Fizikai példák

Hullámegyenlet

1 dim: 

megfeszített húr, rögzítve $\cong \mathbb{R}$, nem feltétlenül véges

meggerjesztés után milyen alak?

$u(t,x)$: az egyensúlyi helyzetből való kitérése x-nél a t időpillanatban

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \quad \text{egydimenziós hullámegyenlet}$$

f: külső erőből adódik

Kezdeti feltételek: $u(0,x) = g(x)$ a húr kezdeti alakja

$\partial_t u(0,x) = h(x)$ a húr pontjainak kezdősebessége

Ez ∞ hosszú húrra van igaz. „A valóságban persze gyakran nem ∞ hosszú." ⟶ kell peremfeltétel.

$u(t,a) = \varphi(t)$

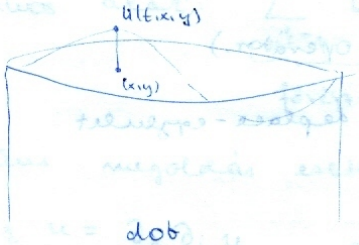
$u(t,b) = \psi(t)$ $\quad \forall t \geq 0$-ra adott

Pl. gitárnál rögzített végek

$\Rightarrow \varphi \equiv \psi \equiv 0.$

2 dim: membrán (rajlitással szemben nincs ellenállása, csak feszítéssel szemben)

$u(t,x,y)$ egyn. helyzetből való kitérés (x,y)-ban



Belátható:

$$\partial_t^2 u - \underbrace{\partial_x^2 u - \partial_y^2 u}_{} = f,$$

f: külső erő.

dob

$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u$ Laplace-operátor

$(\Delta v = \partial_1^2 v + \dots + \partial_n^2 v)$

+ kezdeti vagy peremfeltételek

3 dim: n dim: $\Big\}$ $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ 3 dim: levegő részecskéi rezegnek, hangterjedés

Ez általánosan megoldható, magas dimenzióban bonyolult.

Hővezetési egyenlet

1 dim: 

rúd, elhanyagolható vastagságú, szigetelt palástú

$u(t,x)$: hőmérséklet az x pontban a t időpillanatban.

Belátható: $\partial_t u - \partial_x^2 u = f$, f: külső erő

A rúd hőmérsékletének időbeli lefutásához kell még:

$u(0,x) = g(x)$ kezdeti hőmérséklet-eloszlás

Több nem kell, mert t szerint csak 1-ser deriválunk.

Ha a rúd véges: peremfeltétel:

$$\left.\begin{aligned} u(t,a) &= \varphi(t), \\ u(t,b) &= \psi(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{peremen a hőmérséklet előírása}$$

VAGY:

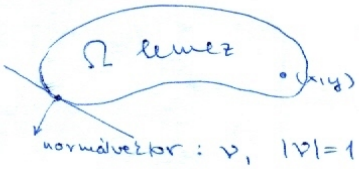
$$\left.\begin{aligned} \partial_x u(t,a) &= \varphi(t) \\ \partial_x u(t,b) &= \psi(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{peremen a hőáramlás előírása}$$

Előbbi Dirichlet-, utóbbi Neumann-peremfeltétel.

2 dim: $\partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = f$ + kezdeti feltétel

Peremfeltétel: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$

VAGY: $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$



peremen a hőáram megadása

A kettőt peremfeltételt lehet kombinálni is.

n dim: $\partial_t u - \Delta u = f$

Poisson-egyenlet

Az előző kettő időfüggetlen változata: $-\Delta u = f$.

(A $-\Delta$ szebb, mint a Δ, mert pozitív operátor.)

Spec. eset: ha $f=0$: $-\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet

További példák

Transzportegyenlet: ~~folyadékban~~ csőben oldat áramlik, kérdés a koncentráció x-ben: $u(t,x)$

$$\partial_t u + v\,\partial_x u = f$$

1 dim, v: az áramlás sebessége

elsőrendű

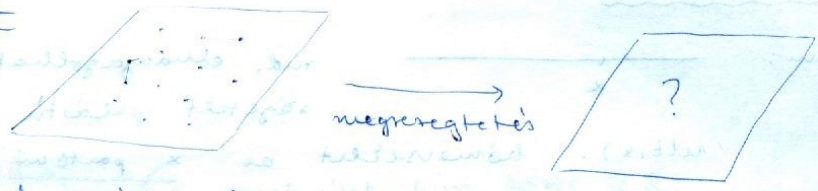
Biharmonikus egyenlet

$\Delta^2 u = f$ lemez rezgései (van ellenállás hajlítással szemben)

negyedrendű

Sophie Germain

Chladni-féle ábrák



A sajátfrekvenciákat jelenítik meg.

Másodrendű egyenletek

2017. 02. 7

Főrészben lineáris egyenletek osztályozása

Általános alak: $\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j \partial_k u(x)}_{\text{főrész}} \overset{(*)}{=} f(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$

$(x \in \Omega)$

Klasszikus megoldás esetén $u \in C^2(\Omega) \Rightarrow$ Young-tétel érvényes,

$\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u \quad \Rightarrow$ ftm. $a_{jk} = a_{kj}$.

$A := (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ x-től függő együtthatómátrix $\longrightarrow$ szimmetrikus.

$\Rightarrow$ A-nak van n db valós sajátértéke, ezek előjele alapján osztályoz.

Def. Ha $x \in \Omega$-ra $A(x)$ minden sajátértéke azonos előjelű (pozitív vagy negatív), akkor $(*)$ x-ben elliptikus.

Ha $x \in \Omega$-ra $A(x)$-nek $n-1$ sajátértéke pozitív és egy negatív vagy fordítva, akkor $(*)$ x-ben hiperbolikus.

Ha $x \in \Omega$-ra $A(x)$-nek egy sajátértéke 0, a többi pedig azonos előjelű, akkor $(*)$ parabolikus.

Ez persze nem teljes osztályozás.

Megj. Ennek megfelelően lehet bevezeti tartományon ell./hip./par. egyenletről.

Def. Ha $\forall x \in \Omega$-ra $(*)$ elliptikus, és van a sajátértékeknek pozitív alsó vagy negatív felső korlátja, akkor $(*)$ Ω-n egyenletesen elliptikus.

Példa.

$-\Delta u = f \longrightarrow A \equiv -I_n$ konst. $\longrightarrow$ $\forall$ pontban elliptikus, sőt egyenletesen is.

$\partial_t^2 u - \Delta u = f \longrightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$ konst $\longrightarrow$ hiperbolikus $\forall x$

$\partial_t u - \Delta u = f \longrightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$ konst. $\longrightarrow$ parabolikus $\forall x$

Másodrendű lineáris állandó elhós egyenletek kanonikus alakja

Ált. alak: $\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \partial_j \partial_k\, u(x)} + \sum_{j=1}^{n} b_j\, \partial_j\, u(x) + c \cdot u(x) = f(x)$

Továbbra is ftk. $a_{jk} = a_{kj} \in \mathbb{R}$, $b_j, c \in \mathbb{R}$.

Cél: minél egyszerűbb alakra transzformálni.

1. lépés: a főrész transzformációja.
2. lépés: az alacsonyabb rendű tagok trafója.

Ugyanúgy csináljuk, mint kvadratikus alaknál: főtengelytétel.

① A sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sajátvektorok $s_1, \dots, s_n$ ortonormált rsz.

$B := (s_1\ s_2\ \dots\ s_n)$ ~~szimmetrikus~~ ortogonális $(B^T = B^{-1})$, mert s_i ON.

$$\Rightarrow B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Legyen $D := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{|\lambda_n|} \end{pmatrix}$, kiv. ha $\lambda_i = 0$, mert akkor a helyén legyen 0.

$$\Rightarrow \underbrace{D B^T}_{C^T} A \underbrace{B D}_{C} = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{sgn} \lambda_n \end{pmatrix}$$

Új változó: $y := C^T x$.

Belátható (nem csináljuk végig), hogy $u(x) = v(y)$-ra az egyenlet:

$$\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_j) \cdot \partial_j^2\, v(y) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \partial_j v(y) + \gamma \cdot v(y) = F(y).$$

Ehhez láncszabály kell csak.

② Minél több tagot el lehet tüntetni, hasonlóan, mint kétdiffben exp. szorzással: csak másod- és nulladrendű derivált maradjon.

$V(y) := v(y) \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j\right)$, ahol az α_j-ket kell úgyszen választani az elsőrendű tagok kiküszöbölésehez.

Levezethető (de nem tesszük), hogy az egyenlet kétféle alak valamelyikére hozható:

$$\begin{cases} 1) & \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_j)\, \partial_j^2 V(y) + d \cdot V(y) = G(y). \\ 2) & \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_j)\, \partial_j^2 V(y) + \sum_{\lambda_j = 0} \tilde{\beta}_j \cdot \partial_j V(y) = G(y), \end{cases}$$

ha vannak 0 sajátértékek

kanonikus alak

Példa. Elliptikus esetben és $\forall \lambda_j > 0$ mellett:

$$\Delta V(y) + d \cdot V(y) = G(y)$$ a kanonikus alak: Helmholtz-egyt. (majdnem Poisson)

Mese. Fizikusmatematika: $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, amivel $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) = 1$

Dirac-delta, az egységugrás tőlétét jelenti.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$ „hát ez már mindenek a teteje"

$\delta : \varphi \mapsto \varphi(0)$ funkcionál

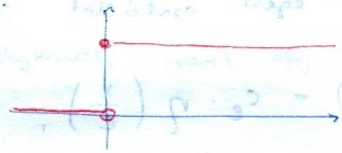
Ez az első lépés a disztribuciócelhez felé.

A disztribuciók általánosított függvények.

A közönséges függvényeket tartalmazzák: ha f fv., akkor

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$ funkcionál.

Heaviside-fv.: $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



Ennek klasszikus deriváltja nincs, de a disztribuciók körében van. A deriváltja épp a Dirac-delta lesz.

Ez jó hír lesz: a disztribuciók korlátlanul deriválhatók.

A $C_0^\infty(\Omega)$ tér

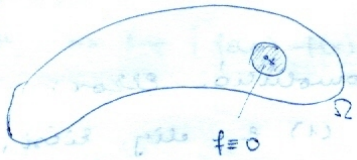
Fel. $C^k(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ k-szor diffható folytonosan Ω-n$\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $k \geq 0$ egész,

$C^0(\Omega)$ csak folytonosságot jelent, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$

$C^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ végtelenszer folyt. diffható Ω-n$\}$

Ezek VT $\mathbb{R}$ felett a szokásos műveletekkel.

Def. $f \in C(\Omega)$ tartója (support):



$$\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \{ x \in \Omega \mid \exists U_x \subset \Omega \text{ szete } x\text{-nek, hogy } f|_{U_x} \equiv 0 \}$$

Megj. $\operatorname{supp} f \supsetneq \{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \}$ általános esetben.

Pl. $f(x) = x - x$ $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$, pedig $f(0) = 0$.

Jel. $C_0^\infty(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subset \Omega \text{ kompakt} \}$

$\mathbb{R}^n$-ben lesznek, a kompaktság cserenabatos a korlátos tartósággal.

Példa. $\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & \text{ha } |x|<1 \\ 0, & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$

Ekkor $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ és $\operatorname{supp} \eta = \overline{B}(0,1)$

Ebből a C^∞-tulajdonság a kérdés.

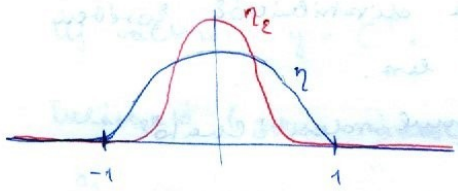
$\eta = h \circ g$, ahol $\underbrace{g(x) = |x|^2}_{C^\infty}$, $h(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-r}\right), & r<1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

h C^∞-sége is csak 1-ben kérdéses, ez egyébként anal., BN.
(Ez példát ad nem analitikus fv-re is.)

Ez egy egész családot is meg fog adni:

$\eta_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, ahol $\varepsilon > 0$ és c_ε olyan, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.



Ha valamiben az $\varepsilon \to 0$ mellett konvergál, az δ lesz.

Az η_ε fv-ek ún. egységapproximációt generálnak, angolul mollifier.
Ezek vi a Dirac-deltát approximálják, ami valamely műveletre nézve egység.

Tétel. $f \in L^1(\Omega)$ és $f = 0$ egy kompakton kívül (azaz $\operatorname{supp} f$ kompakt). Legyen $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = f * \eta_\varepsilon$$

konvolúció. Ekkor:

(1) ε elég kicsi, akkor $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;

(2) $\varepsilon \to 0^+$ mellett $f_\varepsilon \to f$ L^1-ben;

(3) ha $f \in L^p(\Omega)$, akkor $f_\varepsilon \to f$ L^p-ben, $(1 \leq p < \infty)$

(4) ha $f \in C(\Omega)$, akkor $f_\varepsilon \xrightarrow{c} f$.

Megj. Ez jó, mert f_ε szebb, mint f, és belőle lehet f-re következtetni.
Az is jó, hogy megszabadít a magyarem mindenütt-ből.

~~Tétel~~ $f \in L^1(\Omega)$, $f=0$ $\Omega \setminus K$-n, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $K \subset \Omega$ kompakt

2017. 03. 02

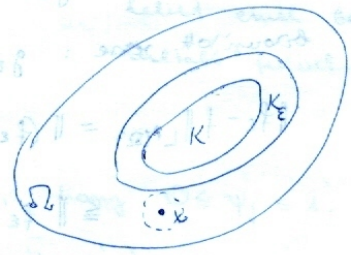
Mj. f $*$-el Ω-n kívül m.m. 0-nak ki lehet terjeszteni

B: (1) • C^∞-hely.ség: paraméteres integrál deriválhatósága:

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \partial_x(\eta_\varepsilon(x-y))\, dy$$

• Kpt. tartóság: $K_\varepsilon := \{x : \operatorname{dist}(K, x) \le \varepsilon\}$

Legyen $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \Rightarrow K_\varepsilon \subset \Omega$



Állítjuk, hogy $f_\varepsilon = 0$ K_ε-on kívül.

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)}_{=0,\ \text{ha } y \notin K} \cdot \underbrace{\eta_\varepsilon(x-y)}_{=0,\ \text{ha } |x-y|>\varepsilon} dy$$

hiszen $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon(\cdot) = \overline{B}(0,\varepsilon)$

$\mathbb{R}^n$ helyett elég $B(x,\varepsilon)$-on integrálni, de erre $y \in B(x,\varepsilon)$ miatt $y \notin K \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0$.

Tehát K_ε kompakt tartó.

(4) Tfh. $f \in C(\Omega) \Rightarrow f$ egyenletesen is folytonos, mert egy kompaktban kívül 0.

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x))\eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)| \cdot \underbrace{\eta_\varepsilon(x-y)}_{\ge 0}\, dy =$$

$$= \int_{|x-y|\le\varepsilon} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{<\mu,\ \text{ha } |x-y|<\varepsilon_0 \ \text{(egy. folytonosság)}} \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \le$$

$$\le \int_{|x-y|\le\varepsilon<\varepsilon_0} \mu \cdot \eta_\varepsilon(x-y) \le \mu \cdot 1$$

$\Rightarrow \forall \mu > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0\ \forall x\ |f_\varepsilon(x) - f(x)| < \mu \Rightarrow \sup |f_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$, midőn $\varepsilon \to 0 \Rightarrow f_\varepsilon \rightrightarrows f$.

(2)
(3) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}$ ← 1. lépés Mj. $L^p(\Omega)$ helyett $L^p(\mathbb{R}^n)$-norma is írható a m.m. 0 kiterjesztés miatt.

$p=1$-re: $\|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f_\varepsilon| = \int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| dx \le$

$$\le \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Az L^p-eset bizonyítása hasonló, csak sokkal hosszabb (BN)

2. lépés Válasszunk $g \in C^\infty(\Omega)$-t, amelyre g kpt tartójú és $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} < \mu$ (BN, hogy ez megtehető)

Elkészítjük a g_ε függvényeket, ezre alkalmazható a (2) már bizonyított része: $g_\varepsilon \xrightarrow{e} g \Rightarrow L^p(\Omega)$-ban is konvergens

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega)} = \|(f_\varepsilon - g_\varepsilon) + (g_\varepsilon - g) + (g-f)\|_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\left.\begin{aligned} &\leq \underbrace{\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p}}_{=\,\|(f-g)_\varepsilon\|_{L^p} \underset{\text{1. lépés}}{\leq} \|f-g\|_{L^p} < \mu} + \underbrace{\|g_\varepsilon - g\|_{L^p}}_{<\mu,\ \text{ha } \varepsilon<\varepsilon_1} + \underbrace{\|g-f\|_{L^p}}_{<\mu} \\ &< 3\mu, \text{ ha } \varepsilon<\varepsilon_1 \end{aligned}\right\}$$

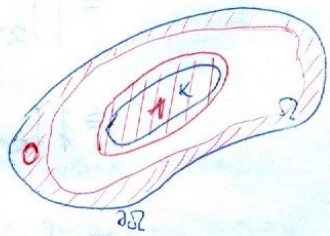
$\Rightarrow f_\varepsilon \to f$ $L^p(\Omega)$-ban $\square$

<u>Köv.</u> (BN) $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban, ha $1 \leq p < \infty$. $\square$

L^p-beliher kpt. tartójú közel, ahhoz C_0^∞-beli közel. (technikai dolog).

<u>Tétel.</u> $K \subset \Omega$, K kompakt, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt. $\Rightarrow \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ K egy kis. ben,

B: Legyen $\varepsilon > 0$, hogy $3\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, azaz $K_{3\varepsilon} \subset \Omega$.

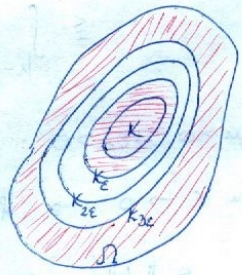


Legyen $f = 1$ a $K_{2\varepsilon}$-on, $f = 0$ $\Omega \setminus K_{2\varepsilon}$-on.

f-re teljesülnek az előző tétel feltételei.

$\Rightarrow f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, sőt $f_\varepsilon = 0$ $K_{3\varepsilon}$-on kívül.

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)}_{1 \geq\ \geq 0}\ \underbrace{\eta_\varepsilon(x-y)}_{\geq 0}\,dy \Rightarrow 0 \leq f_\varepsilon \leq 1.$$

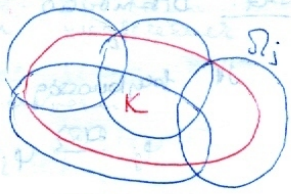


$$f_\varepsilon|_{K_\varepsilon} = 1: \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{|x-y|\leq\varepsilon} f(y)\,\eta_\varepsilon(x-y)\,dy$$

$$= \int_{|x-y|\leq\varepsilon} 1 \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1.$$

$\Rightarrow \varphi = f_\varepsilon$ jó választás. $\square$

Tétel. (Egységosztás tétele) K kpt., $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$ nyílt.



$\Rightarrow \exists \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j=1,\dots,k)$, hogy $0 \le \varphi_j \le 1$

és $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$ K egy környezetében.

Mj. Így globálisról lokálisra lehet áttérni. Lehet ennél bonyolultabb fedésre is.

B: 1. lépés (technikai) Belátható, hogy $\exists G_j$ nyílt, hogy $\overline{G_j}$ kompakt, $\overline{G_j} \subset \Omega_j$ és $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_j$.

Azt lehet korlátosabbra áttérni, (BN)

2. lépés Az előző tétel alapján $\exists \psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, hogy $0 \le \psi_j \le 1$. és $\psi_j = 1$ $\overline{G_j}$ egy kis. ($K = \overline{G_j}$, $\Omega = \Omega_j$ választás)

Legyen $\varphi_1 := 1 - (1-\psi_1) = \psi_1$

$\varphi_2 := (1-\psi_1) - (1-\psi_1)(1-\psi_2) = (1-\psi_1)\psi_2$

$\varphi_j := (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{j-1}) - (1-\psi_1)\dots(1-\psi_j) = \underbrace{\underbrace{(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{j-1})}_{\in C^\infty \text{ tényezőket}} \cdot \underbrace{\psi_j}_{\in C_0^\infty(\Omega_j)}}_{\in C_0^\infty(\Omega_j)}$

Állítjuk, hogy ez jó. Nyilván $C_0^\infty(\Omega_j)$-beliek.

Szintén látnik, hogy $0 \le \varphi_j \le 1$.

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \underset{\text{teleszkóp}}{=} 1 - \underbrace{(1-\psi_1)\dots(1-\psi_k)}_{=0,\ \text{ha } \overline{G_j}\text{-ben vagyunk}} \Rightarrow = 0 \ \bigcup_{j=1}^{k} \overline{G_j}\text{-n.}$$

$\Rightarrow \sum \varphi_j = 1$ az $\bigcup_{j=1}^{k} \overline{G_j}$-n, és $\bigcup \overline{G_j} \supset K$. □

„Közben elmondok egy történetet. Valószínűleg nem történt meg, de nem baj."

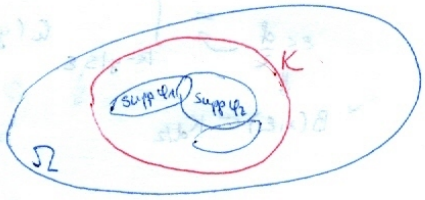
Disztribúcióelmélet

$C_0^\infty(\Omega)$ $\mathbb{R}$-vektortér a szokásos műveletekkel.

Bevezetünk rajta konvergenciafogalmat, ez egy lok. konvex top. tér lesz.

Def. $(\varphi_j) \in C_0^\infty(\Omega)$ sorozata, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergál, ha $\exists K \subset \Omega$ kpt., hogy $\forall j$: $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, és $\forall \alpha$ multiindexre

$\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ Ω-n.



$\mathcal{D}(\Omega)$ a $C_0^\infty(\Omega)$ az ennek megfelelő topológiával.

Def. Disztribúció: $u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál.

Itt folytonosság alatt sorozatfolytonosságot értünk, azaz

$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_j \quad \Rightarrow \quad u(\varphi_j) \to u(\varphi)$ kell teljesüljön, ez valójában egy átviteli elv.

Jel. $\mathcal{D}'(\Omega) = \{ u \mid u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \}$ a disztribúciók halmaza (ill. szóródásban vektortere)

Példa. $a \in \mathbb{R}^n$ rögzített. Az a-ra koncentrált Dirac-delta-disztribúció:

$\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$. Könnyű látni, hogy ez valóban disztribúció.

Laurent Schwartz, 1944-ben definiálta a disztribúciókat. → Fields-medál.

017.03.09. **Példa.** Reguláris disztribúció. Legyen $f \in L^1_{loc}(\Omega) = \{ g: \Omega \to \Omega \mid \forall K \subset \Omega \ \ g|_K \text{ integrál} \}$.

$T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ az f-hez tartozó reguláris disztribúció. (Ez valóban disztr.)

Nyilvánvaló: $f = g$ m.m. $\Rightarrow T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \ \forall \varphi$. Visszafele?

Tétel. Tfh. $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f = g$ m.m. Ω-n.

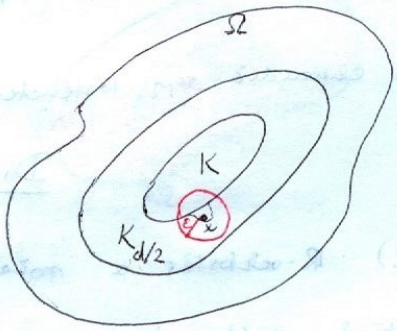
B: $T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \iff \underbrace{\int_\Omega (f-g)\varphi}_{T_{f-g}} = 0 \quad \forall \varphi$

$h := f - g$, $T_h(\varphi) = 0 \ \forall \varphi$. Kell: $h = 0$ m.m. Ω-n.

Belátjuk, hogy $\forall K \subset \Omega$ kpt.-ra $h = 0$ K-n.

$d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$

$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & \text{ha } x \in K_{d/2} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$



Elég keresni ε-ra $\tilde{h}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ és $\tilde{h}_\varepsilon \to \tilde{h}$ $L^1_{\ell}(\Omega)$-ban, midőn $\varepsilon \to 0$.

$$\underset{x \in K}{\tilde{h}_\varepsilon(x)} = \int_\Omega \tilde{h}(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{|x-y| \le \varepsilon} \tilde{h}(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy =$$

$$\underset{\substack{\varepsilon \le \frac{d}{2} \\ \Downarrow \\ B(x,\varepsilon) \subset K_{d/2}}}{=} \int_{|x-y| \le \varepsilon} h(y) \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_\Omega h(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy =$$

$$= T_h(\underbrace{y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)}_{\in C_0^\infty(\Omega)}) \underset{\text{feltétel}}{=} 0$$

$\Rightarrow \tilde{h}_\varepsilon|_K = 0$, és $\tilde{h}_\varepsilon \xrightarrow{L^1} \tilde{h}$ miatt $\tilde{h}|_K = 0$ m.m., és $h|_K = \tilde{h}|_K = 0$ m.m. $\square$

Köv. Az $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ és $T_f \in \mathcal{D}(\Omega)$ hölcs. egyértelműen megfelelnek egymásnak. Ezért jogos a disztribuciókat ált. fv.-nek nevezni.

Megj: δ_a nem reguláris disztribució.

Sorozatfolytonosság: $\underbrace{\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi}$ $\Rightarrow$ $u(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{R}} u(\varphi)$

1) $\exists K \subset \Omega$: $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \ \forall j$

2) $\forall \alpha$: $\partial^\alpha \varphi_j \hookrightarrow \partial^\alpha \varphi$

Tétel. $u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lin. funk. Ekvivalensek:

1) u sorozatfolytonos

2) $\forall K \subset \Omega$ kompakt $\exists c_K \in \mathbb{R}$, $c_K > 0$, $\exists m_K \in \mathbb{Z}$, $m_K \geq 0$:

ha $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ és $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, akkor $|u(\varphi)| \leq c_K \cdot \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi|$.

B: 2) $\Rightarrow$ 1): Tfh. $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$. $\Rightarrow$ $\exists K$ kpt: $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \ \forall j$

$\Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset K \overset{2)}{\Longrightarrow} \exists c_K > 0$, $m_K \geq 0$:

$$0 \leq |u(\varphi_j) - u(\varphi)| = |u(\varphi_j - \varphi)| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \underbrace{\sup_\Omega |\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi)|}_{\downarrow \ 0, \text{ mert } \partial^\alpha \varphi_j \hookrightarrow \partial^\alpha \varphi.}$$

1) $\Rightarrow$ 2): $\lightning$ $\exists K \subset \Omega$ $\forall c_K > 0$ $\forall m_K \geq 0$ $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$:

$$|u(\varphi)| > c_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi|$$

Legyen $c_K = m_K = j = 1, 2, \ldots$

$\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \Rightarrow |u(\varphi_j)| \overset{\circledast}{>} j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi_j| \geq 0 \Rightarrow u(\varphi_j) > 0$

$\Rightarrow \psi_j := \dfrac{\varphi_j}{u(\varphi_j)}$ értelmes, $\operatorname{supp} \psi_j \subset K$ $\Rightarrow$ $\circledast$: $\underbrace{|u(\psi_j)|}_{1} > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_\Omega |\partial^\alpha \psi_j|$ $/|u(\varphi_j)|$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{j}}_{\downarrow \ 0} > \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_\Omega |\partial^\alpha \psi_j| \Rightarrow \forall \alpha$ multiindexre $\partial^\alpha \psi_j \hookrightarrow 0$.

$\Rightarrow u(\psi_j) \longrightarrow u(0) = 0$. De $|u(\psi_j)| = 1 \not\to 0$ $\lightning$

$\square$

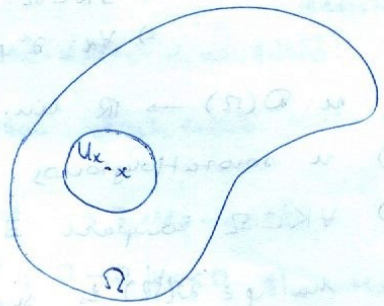
Alkalmazás. T_f folytonossága.

Adott $K \subset \Omega$ kompakt, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\right| = \left|\int_K f\varphi\right| \leq \underbrace{\int_K |f|}_{c_K} \cdot \underbrace{\sup_\Omega |\varphi|}_{m_K = 0\text{-ra vett } \sum}$$

Def. $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G \subseteq \Omega$ nyílt. Ekkor $u = v$ G-n globálisan, ha $\operatorname{supp} \varphi \subset G \Rightarrow u(\varphi) = v(\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Def. $u = v$ lokálisan Ω-n, ha $\forall x \in \Omega$ $\exists x \in U_x \subset \Omega$ környezet, hogy $u = v$ U_x-en globálisan.



Megj. Globális egyenlőség $\Rightarrow$ lokális egyenlőség.

Tétel. $u = v$ Ω-n lokálisan $\Rightarrow$ globálisan is.

B: Kell: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u(\varphi) = v(\varphi)$.

Adott: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi = K \subset \Omega$ kpt.-ra lok. egyenlőség.

$\Rightarrow \forall x \in \Omega$ $\exists U_x$ szet, hogy $u(\varphi) = v(\varphi)$, ha $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$.

$\underbrace{\bigcup_{x \in \Omega} U_x}_{\text{nyílt}} \supset K$ kpt $\Rightarrow$ van véges fedés: $\bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j} \supset K$

Egységosztás: $\exists \varphi_j \in C_0^\infty(U_{x_j})$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$. K egy szomszédban

$$u(\varphi) = u(\varphi \cdot 1) = u\left(\varphi \cdot \sum_{j=1}^{k} \varphi_j\right) = u\Big(\sum_{j=1}^{k} \underbrace{\varphi\varphi_j}_{\operatorname{supp} \subset U_{x_j}}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} u(\varphi \cdot \varphi_j) \overset{\text{lok.}}{=} \sum_{j=1}^{k} v(\varphi \cdot \varphi_j) \underset{\text{vissza}}{\overset{\text{ugyanez}}{=}} \ldots = v(\varphi)$$

$\square$

Def. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Az u tartója $\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \bigcup\{x \in \Omega \mid \exists U_x$ szomszéd x-nek, $u|_{U_x} = 0\}$.

a legbővebb nyílt, amin $u = 0$.

Példa. $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

$\operatorname{supp} T_f = f$ (ha f folytonos) (BN)

Ebből következik, hogy δ_a nem reguláris.

Algebrai műveletek disztribucióra

Def. $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\quad (u \pm v)(\varphi) = u(\varphi) \pm v(\varphi)$

$$(\lambda u)(\varphi) = \lambda \cdot u(\varphi)$$

Áll. $u \pm v$, $\lambda u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

B: kis.

Köv. $\mathcal{D}'(\Omega)$ vektortér $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) felett.

Def $\psi \in C^\infty(\Omega)$-ra $(\psi \cdot u)(\varphi) = u \cdot (\psi \varphi)$.

$\psi \cdot \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, mert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Ez valóban disztribució lesz.

Disztribuciók szorzatát nem értelmezzük.

Disztribuciók deriválása

Cél:

$$\begin{tikzcd}
f \in C^\infty(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^\alpha"] & T_f \in \mathcal{D}(\Omega) \arrow[d] \\
\partial^\alpha f \in C^\infty(\Omega) \arrow[r] & T_{\partial^\alpha f} \in \mathcal{D}(\Omega)
\end{tikzcd}$$

klasszikus deriválás

legyen kommutatív diagram.

Áll. Ha $f \in C^\infty(\Omega)$, akkor $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot T_f(\partial^\alpha \varphi)$

B: Integrálás.

$$\int_\Omega \partial^\alpha f \cdot \varphi \overset{?}{=} (-1)^\alpha \cdot \int_\Omega f \, \partial^\alpha \varphi.$$

Ez parciális integrálásokon át jön ki, a [...] rész a kompakt tartó miatt 0.

Célszerű: $\partial^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot T_f(\partial^\alpha \varphi)$. Ezt már nem csak regulárisra fogjuk így definiálni:

Def. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α multiindex $\Rightarrow (\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \cdot u(\partial^\alpha \varphi)$.

Ez valóban disztribució lesz (lineáris). (BN).

Példa Heaviside-fv. $T_H'(\varphi) = (-1) \cdot T_H(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H \cdot \varphi' = -\int_0^\infty 1 \cdot \varphi'(x)\, dx =$

$$= -(\underbrace{\varphi(\infty)}_{\substack{0 \\ \text{mert kpt.} \\ \text{tartójú}}} - \varphi(0)) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

$$\Rightarrow T_H' = \delta_0$$

Röviden: $H' = \delta_0$. Ezt a jelölést a továbbiakban használni fogjuk.

2017.03.16.

Áll. (BN) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a_0=a<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<b=a_n$, $f\in\bigcap C^1(a_j,a_{j+1})$ és f, f' folyt. kiterjeszthető $[a_j, a_{j+1}]$-re.

$$\Rightarrow (T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\lim_{a_j+0} f - \lim_{a_j-0} f\right)\delta_{a_j}.$$

A biz. nagyonjó, mint $H'=\delta_0$-nál, parc. integrálni kell.

Legyen $Lu=f$, ahol L lineáris diffoperátor.

Eddig u, f függvények. Most disztribucióval.

Terv: $LE=\delta_0$ alapmegoldás $\Rightarrow$ $u=E*f$ megoldás

$E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Disztribuciók direkt szorzata

Def. Legyen $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

Ekkor f és g direkt szorzata $(f\times g)(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$.

Könnyen látható, hogy $f\times g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+m})$ (Fubini-tétel).

Ezt szeretnénk disztribucióra általánosítani.

$$\begin{array}{ccc} (f,g) & \xrightarrow{T} & (T_f, T_g) \\ \downarrow\times & & \downarrow\times \\ f\times g & \xrightarrow{T} & T_{f\times g} \end{array}$$

kommutáljon.

$$T_{f\times g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f\times g)(x,y)\cdot\varphi(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} g(y)\cdot\varphi(x,y)\,dy}_{T_g(y\mapsto\varphi(x,y))}\,dx}_{T_f(x\mapsto T_g(y\mapsto\varphi(x,y)))} =$$

Van ennek értelme?

$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \Rightarrow (y\mapsto\varphi(x,y))\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ szerintiek.

$x\mapsto T_g(y\mapsto\varphi(x,y)) \overset{?}{\in} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Tétel. (BN) $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Tekintsük az $A:\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})\mapsto v(y\mapsto\varphi(x,y))$ hozzárendelést.

Ekkor $A:\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ folyt. lin. operátor.

A bizonyítás technikai, ötlete nem igényel.

Ennek alapján:

<u>Def.</u> $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ -re $(u \times v)(\varphi) = u(x \mapsto v(y \mapsto \varphi(x,y)))$

az u és v disztribúciók direkt szorzata. $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}))$

<u>Megj.</u> $u \times v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$

<u>Példa.</u> $(\delta_a \times \delta_b)(\varphi) = \delta_a(x \mapsto \delta_b(y \mapsto \varphi(x,y))) = \delta_a(x \mapsto \varphi(x,b)) = \varphi(a,b)$

$a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

De másrészt vétve $\varphi(\underbrace{a,b}_{\in \mathbb{R}^{n+m}}) = \delta_{(a,b)}$ $\Rightarrow \delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$.

<u>Példa.</u> $T_f \times T_g = T_{f \times g}$ $\forall f, g$ -re, hiszen part emiatt definiáltunk így.

<u>Tulajdonságok</u>

<u>Áll.</u> $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ $\Rightarrow$ $u(x \mapsto v(y \mapsto \varphi(x,y))) = v(y \mapsto u(x \mapsto \varphi(x,y)))$

B: Ötlete: először $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{k} \psi_j(x) \chi_j(y)$ alakúakra, ahol $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Ezre

$$u(x \mapsto v(y \mapsto \sum \psi_j(x) \chi_j(y))) \overset{v \text{ lin}}{=} u\left(x \mapsto \sum \psi_j(x) v(y \mapsto \chi_j(y))\right) \overset{u \text{ lin.}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} u(x \mapsto \psi_j(x))\, v(y \mapsto \chi_j(y)) = \dots$$

Ugyanezt visszafelé megcsinálva épp a kívánt állítás adódik φ-re.

Az ilyen φ-k sűrű alteret alkotnak, innen határátmenet. □

<u>Áll.</u> $u_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $j = 1,2$ -re, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \times v = \lambda_1 \cdot (u_1 \times v) + \lambda_2 \cdot (u_2 \times v)$.

B: def. □

<u>Áll.</u> (BN) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ α n hosszú, β m hosszú multiindex.

$\Rightarrow \partial^{(\alpha,\beta)}(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times (\partial^\beta v)$. □

<u>Áll.</u> (BN) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$ □

Ezek mind definícióból jönnek.

Disztribíciók konvolúciója

Függvények konvolúciója: $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)\,dy$

$f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$-re értelmes ez egyáltalán? És $f*g \in L^1_{loc}$ lesz?

Technikai feltevések: (1) m.m. x-re $y \mapsto f(y)\cdot g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ legyen

(2) $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)\cdot g(x-y)|\,dy \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

((2) abszt. értéke nélkül azt jelenti, hogy $f*g \in L^1_{loc}$. Abszt. érték azért kell, hogy Fubini használható legyen.)

<u>Def.</u> $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$-re (1), (2) teljesülése esetén $f*g$ a konvolúció,

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy.$$

Ekkor (2) $\Rightarrow$ $f*g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

<u>Áll.</u> $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}$

B: $\|f*g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy\right| dx \leq$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\cdot|g(x-y)|\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\cdot\|g\|_{L^1}\,dy = \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}$$

□

<u>Áll.</u> (BN) Ha f és g legalább egyike kpt. tartójú $\Rightarrow \exists\, f*g$. □

Hogy általánosítható ez disztribíciókra?

$$\begin{array}{ccc} (f,g) & \xrightarrow{T} & (Tf, Tg) \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ f*g & \xrightarrow{T} & Tf * Tg \end{array}$$

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,\varphi(x)\,dy\,dx =$$

$z = x-y$

$x = z+y$

y marad

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(z)\,\varphi(y+z)\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f*g)(y,z)\,\varphi(y+z)\,dy\,dz =$$

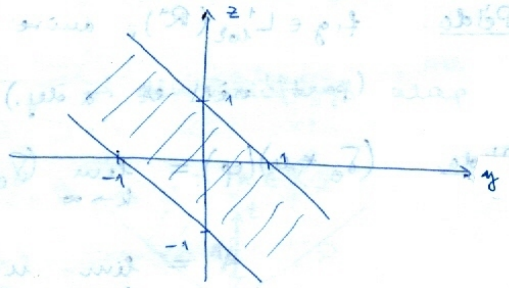
$$= \underbrace{T_{f\times g}}_{T_f\times T_g}\big((y,z)\longmapsto \varphi(y+z)\big)$$

$(y,z) \longmapsto \varphi(y+z) \overset{?}{\in} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$

A C^∞ nyilvánvaló, de a kompakt tartójúság nem felt. teljesül.

Pl. $n=1$, $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B}(0,1)$. $\Rightarrow \operatorname{supp}\left((y,z) \mapsto \varphi(y+z)\right) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y+z \in \overline{B}(0,1)\}$

$|y+z| \leq 1$ nem kompakt.



Megoldás: kompaktta tesszük.

<u>Def.</u> Csonkító függvény: $\zeta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, hogy

(1) $\forall \alpha$ multiindexre $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \longrightarrow 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kpt. részhalmazán

(2) $\forall \alpha \ \exists C_\alpha \quad |\partial^\alpha \zeta_k| \leq C_\alpha$ egyenletes korlátosság.

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)\, g(z)\, \varphi(y+z)\, dy\, dz = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lebesgue-tétel}}}{\lim_{k\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)\, g(z)\, \zeta_k(y,z)\, \varphi(y+z)\, dy\, dz =$$

$$= \lim_{k\to\infty} T_{f\times g}\left((y,z) \longmapsto \zeta_k(y,z) \cdot \varphi(y+z)\right)$$

<u>Def.</u> Legyen $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ekkor azt mondjuk, hogy u és v konvolúciója értelmes, ha $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \zeta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ csonkítófü-sorozatra $\exists \lim_{k\to\infty} (u\times v)\left((y,z) \longmapsto \zeta_k(y,z) \cdot \varphi(y+z)\right)$, és a limesz lineárisan és folytonosan függjön φ-től.

Ekkor $(u*v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u\times v)\left((y,z) \longmapsto \zeta_k(y,z) \cdot \varphi(y+z)\right)$.

<u>Mj.</u> A folytonosság valójából kijön, nem kell feltenni, de technikás.

Tulajdonságok

<u>Áll.</u> $\exists\, u*v \Rightarrow \exists\, v*u$ és $u*v = v*u$.

B: def. és $u\times v$. $\square$

<u>Áll.</u> $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) * v = \lambda_1 (u_1 * v) + \lambda_2 (u_2 * v)$

B: def. $\square$

Áll. $\exists u*v \Rightarrow \forall \alpha: \partial^\alpha(u*v) = (\partial^\alpha u)*v = u*\partial^\alpha v$

(BN) □

2017.03.23. Áll. $\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ (Minkowski-összeg lezártja).

(BN)

Példa. $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, amire $\exists f*g \Rightarrow T_{f*g} = T_f * T_g$

(pont azért ez a def.)

Példa. $(\delta_0 * u)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (\delta_0 \times u)((y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\cdot\varphi(y+z)) =$

$$= \lim_{k\to\infty} u(\underbrace{z \mapsto \zeta_k(0,z)\cdot\varphi(0+z)}_{\xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \text{ (ellenőrizhető)}}) = u(\varphi)$$

$\Rightarrow \delta_0 * u = u$, δ_0 egységelem

Alapmegoldások

Legyen L egy állandó elős lin. diffoperátor, azaz

$$Lu = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$Lu = F \qquad F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Keresendő: $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Def. Az $Lu = F$ egyenlet egy alapmegoldása az $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció, ha $LE = \delta_0$.

Tétel. Ha $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ az $Lu = F$ egy alapmegoldása, és $\exists E*F$, akkor $L(E*F) = F$.

Sőt az $Lu = F$-nek legfeljebb egy olyan $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ megoldása lehet, amelyre $\exists u*E$.

B.: $$L(E*F) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (E*F) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (\partial^\alpha E)*F \overset{\text{lin}}{=}$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha E\right) * F = LE*F = \delta_0 * F = F.$$

Ha $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $Lu_1 = Lu_2 = F$, $\exists u_1*E$, u_2*E.

$$\Rightarrow u_1 - u_2 = (u_1-u_2)*\delta_0 = (u_1-u_2)*\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha E =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (u_1-u_2)\right) * E = (Lu_1 - Lu_2)*E = 0*E = 0$$

$\Rightarrow u_1 = u_2$. □

Mj. Erősen kihasználtuk, hogy $\exists u_1*E$, u_2*E.

Példák. (BN)

1.) Hővezetési egyenlet: $\partial_t u - \Delta u = F$

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & \text{ha } t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$\forall n$ minden dimenzióban érvényes

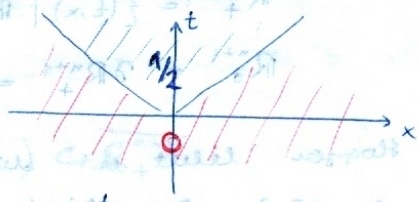
$\downarrow$

majdem egy normális eo. sűrűsége.

2.) Hullámegyenlet: $\partial_t^2 u - \Delta u = F$ $\rightarrow$ dimenziófüggő alap

1 dimenzió: $E(t,x) = \frac{1}{2} H(t-|x|)$

$x \in \mathbb{R}$

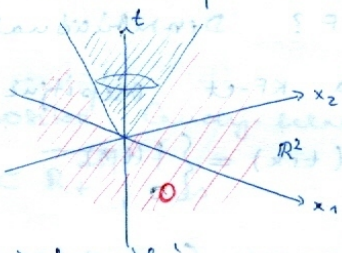


2 dimenzió: $E(t,x) = \dfrac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}$

3 dimenzió: $E(\varphi) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \varphi(t,x)\, d\sigma,$

$\downarrow$

már nem reg. disz.!



ahol $d\sigma$ a felszíni szerinti integrálás,

$S_t = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = t \}$

supp E itt is egy kúp része.

3.) Poisson-egyenlet: $-\Delta u = F$

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n\,|x|^{n-2}} & n\geq 3 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ω_n = n-dim egységgömb felszíne. $(\omega_3 = 4\pi)$

Ezeket nem kell tudni vizsgára.

Fourier-transzformáltat majd a szigetelőre.

Hullámegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatok

$$\left.\begin{array}{lll} \partial_t^2 u - \Delta u = f(t,x) & \text{hullámegyenlet} & (t>0,\ x\in\mathbb{R}^n) \\ \text{KF:}\quad u(0,x) = g(x) & & (x\in\mathbb{R}^n) \\ \quad\ \ \partial_t u(0,x) = h(x) & & (x\in\mathbb{R}^n) \end{array}\right\} \text{KÉF}$$

Milyen megoldást keresünk?

$\rightarrow$ klasszikus: $u\in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, melyre $u, \partial_t u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+)$

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid t>0\} = (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^{n+1}_0 = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(0,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\} = \{0\}\times\mathbb{R}^n \qquad \text{féltér}$$

Hogyan lehet ezt disztribucióra általánosítani? Mit jelent a KF? Disztribuciónak nincs pontbeli értéke.

$\Rightarrow$ a KF-et beépítjük az egyenletbe.

Fel. $\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

<u>Tétel</u>. Tfh. $\tilde{f}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, és u klasszikus megoldása a hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak.

$$\Rightarrow \partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$$

B: $$\left(\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}}\right)(\varphi) = + T_{\tilde{u}}(\partial_t^2\varphi) - T_{\tilde{u}}(\Delta\varphi) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}\,\partial_t^2\varphi - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}\,\Delta\varphi \quad *$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}\,\partial_t^2\varphi = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,\partial_t^2\varphi(t,x)\,dx\,dt = \quad \text{parc. int.}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\underbrace{\left[u(t,x)\,\partial_t\varphi(t,x)\right]_{t=0}^{\infty}}_{\underbrace{-u(0,x)}_{g(x)}\partial_t\varphi(0,x)} - \int_0^\infty \partial_t u(t,x)\,\partial_t\varphi(t,x)\,dt\Bigg)dx = \quad \text{parc. int.}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\partial_t\varphi(0,x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\left[\partial_t u(t,x)\,\varphi(t,x)\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \partial_t^2 u(t,x)\,\varphi(t,x)\,dt\Bigg)dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\partial_t\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \partial_t^2 u\cdot\varphi =$$

$$= (\delta_0'\times T_g)(\varphi) + (\delta_0\times T_h)(\varphi) + \iint_{\mathbb{R}^n\ 0}^{\infty} \partial_t^2 u\cdot\varphi$$

Ugyanígy $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u} \cdot \Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \Delta u \cdot \varphi$

2 parc. int. Nincs plusz tag, mert x-ben integrálunk

$$* = (\delta_0' \times T_g)(\varphi) + (\delta_0 \times T_h)(\varphi) + \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \underbrace{(\partial_t^2 u - \Delta u)}_{f,\ \text{mert } u \text{ kl. mo.}} \varphi =$$

$$= (\delta_0' \times T_g)(\varphi) + (\delta_0 \times T_h)(\varphi) + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{f} \varphi =$$

$$= (\delta_0' \times T_g)(\varphi) + (\delta_0 \times T_h)(\varphi) + T_{\tilde{f}}(\varphi)$$

□

<u>Megj.</u>: $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, $\operatorname{supp} (T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h) \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$

Ez motiválja a következőt.

<u>Def.</u> A nullámegoldásra vonatkozó általánosított Cauchy-feladat: keresendő $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, melyre $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, és $\partial_t^2 u - \Delta u = F$, ahol $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$

<u>Megj.</u>: Ha u klasszikus megoldás, akkor $\tilde{u}$ általánosított megoldás $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldallal.

<u>Tétel.</u> $\forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, $\exists!$ általánosított megoldása a Cauchy-feladatnak, mégpedig $u = E * F$, ahol E a nullámegoldott alapmegoldása.

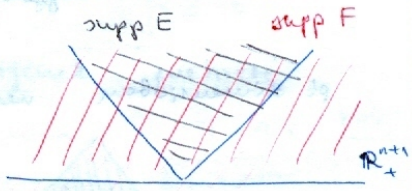
„B": Belátható, hogy $\exists E$ alapmo., amelyre $\operatorname{supp} E \subset$ kúp.

Az alapmo.-ra vonatkozó tétel szerint ha $\exists E * F$, akkor az megoldása az F jobb oldalú egyenletnek.

Belátható, hogy $\exists E * F$, ez pont a kúpon múlik.

Másrészt legfeljebb egy u van, amire $\exists u * E$, ez a tartók miatt mindig $\exists$.

És még meg kell adni E-t.



□

<u>Köv.</u> Klasszikus megoldás legfeljebb egy lehet.

B. Ha lenne két különböző (u_1, u_2), akkor $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ általánosított megoldások. □

Hogy kapjuk a klasszikus megoldást?

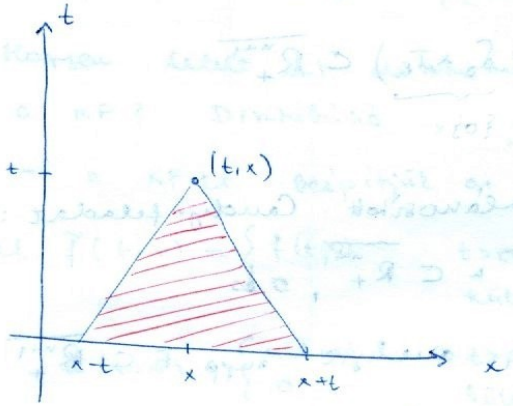
$$E * \left(T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h \right)$$

<u>Tétel.</u> $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

kl. mo. a Cauchy-feladatnak.

Ún. d'Alembert-formula. 2 dimenzióban már sokkal rondább.

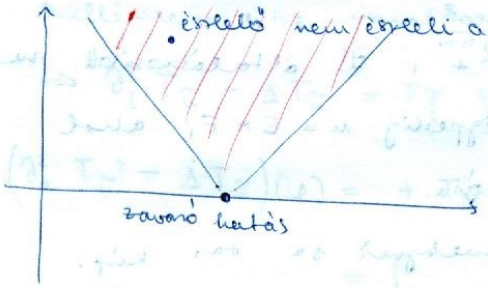


A formulában a háromszögön integrálunk.

→ függőségi kúp

A (t,x)-beli zavaró hatás itt érzékelhető. A kúpon kívül nem.

<u>Köv.</u> A hullám véges sebességgel terjed ebben a modellben.



Hullámfrontok vannak.

2017.03.30.

Magasabb dimenzióban paritás szerint szétválik.

→ páros dimenzióban a kúp mint test (a belsejével együtt), páratlan dimenzióban csak kúpfelület

Ez az ún. Huygens-elv.

3 dimenzióban hullámdiffúzió, bármeddig érzékelhető.

4 dimenzióban nem halljuk a dolgokat ossze.

Hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatok

$$\partial_t u - \Delta u = f \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^n$$

hőv. egyenlet.

Kezdeti feltétel: $u(0,x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \longrightarrow$ t-ben 1-szer, x-ben 2-szer folyt. diff.ható,
és $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ } klasszikus mo.

Kérdés: hogy vihető ez át disztribucióra? $\tilde{f}$, $\tilde{u}$ a korábbiakhoz hasonlóan értelmezhető.

<u>Tétel</u>. $\tilde{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, és u klasszikus mo. a feladatnak, akkor
(BN)
$$\partial_t T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta_0 \times T_g$$

A bizonyítás a multitorihoz hasonlóan megy.

<u>Def</u>. A hőv. egyenletre vonatk. általánosított Cauchy-feladat:

$\partial_t u - \Delta u = F$, olyan $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ keresendő, ami ennek megoldása, $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, ahol $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ adott és $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

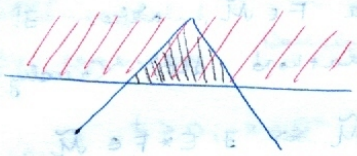
A bizonyítás most az lenne, hogy $u = E * F$ az alapmegoldásra vonatkozó tétel miatt, E alapmegoldás.

Most
$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & \text{ha } t>0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Baj: $E * F$ általában nem létezik, a gondot a tartók okozzák: $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} F = \mathbb{R}^{n+1}_+$.

A multiplikációnál a szét tartó eltolt-tükrözött szorzat mértéke ért. volt, lehetett integrálni.

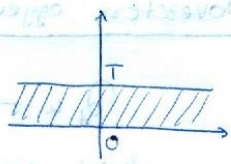
Itt szét feltétel mértéke nem lesz ért.



Egy lehetőség: F egy műveleti osztályból, hogy automatikusan konvolválható legyen E-vel.

Ez nagyon: elveszítjük az egyértelműséget, ez a modell végtelen sok megoldást ad. (Melyiket választja a természet?)

Def. $\mathcal{M} = \{ f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, melyre $f(t,x)=0$, ha $t<0$, és $\forall T>0$: $f \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)\}$



Áll. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists\, E*f$ fv. értelemben, és $E*f \in \mathcal{M}$.

B: Felhasználjuk, hogy $\forall t>0$ $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\,dx = 1$. (norm. eo. sfv.-e)

$$|(E*f)(t,x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(\tau,\xi)\, f(t-\tau, x-\xi)\, d\tau\, d\xi \right| =$$

$E(\tau,\xi)=0$, ha $\tau<0$

$f(t-\tau, x-\xi)=0$, ha $t-\tau<0$.

$$= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, f(t-\tau, x-\xi)\, d\tau\, d\xi \right| \le$$

$$\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\cdot |f(t-\tau, x-\xi)|\, d\xi\, d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\xi}_{1} \, d\tau =$$

$$= \int_0^t \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)}\, d\tau \overset{\text{ha } t\le T}{\le} T\cdot \|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)}$$

$\exists$ és $\in \mathcal{M}$.

Ha $t<0 \Rightarrow (E*f)(t,x)=0$, mivelig 0-t integrálunk. □

Def. $\tilde{\mathcal{M}} = \{ \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha} \mid f_\alpha \in \mathcal{M} \}$ az $\mathcal{M}$-beli függvény reg. disz. deriváltjaiból képzett véges lin. kombinációk

Áll. Ha $F \in \tilde{\mathcal{M}} \Rightarrow \exists\, E*F$ disztribucióként és $E*F \in \tilde{\mathcal{M}}$.

B: $f_\alpha \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists\, E*f_\alpha \in \mathcal{M}$ függvényként

$\Rightarrow \exists\, T_E * T_{f_\alpha} = T_{E*f_\alpha}$ disztribució $\Rightarrow \partial^\alpha T_{E*f_\alpha} = T_{E*f_\alpha} * \partial^\alpha T_{f_\alpha}$

$$\Rightarrow \exists\, E*\left(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha}\right) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{\underbrace{E*f_\alpha}_{\in\mathcal{M}}} \in \tilde{\mathcal{M}}$$

Tétel. Ha $F \in \tilde{\mathcal{M}}$, akkor $\exists!\, u \in \tilde{\mathcal{M}}$ megoldása az hőv. egyenletre vonatkozó ált. Cauchy-feladatnak. □

B: $F \in \tilde{\mathcal{M}} \Rightarrow \exists\, E*F \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Az alapmegoldásra vonatkozó tétel miatt az megoldás lesz, sőt legfeljebb 1 olyan u mo. van, amire $\exists\, u*E$.

De $u \in \tilde{\mathcal{M}}$ esetén az mivelig létezik $\Rightarrow$ egyszerűen $\tilde{\mathcal{M}}$-beli mo. van. □

Köv. A klasszikus feladatnak legfeljebb 1 $\mathcal{M}$-beli megoldása lehet.

B: Ha lenne 2 $\longrightarrow$ a megfelelő $\tilde{\mathcal{M}}$-beliek megoldaná az általánosított Cauchy-feladatot. $\square$

Tehát olyan mo. nem legfeljebb 1, ami $(0,T)\times\mathbb{R}^n$-en korlátos.

A klasszikus megoldás: $E * \left(T\tilde{f} + \delta_0 \times Tg\right)$. Ennek alapján:

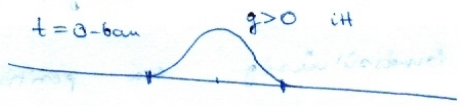
Tétel. $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^{12}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, amelyre $f, \partial_t f, \partial_x f, \partial_x^2 f$ korl. a $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ sávban.

$$\Longrightarrow u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau,\xi)}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi \cdot \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}$$ megoldása a kl. feladatnak. $\square$

(Vizsgára nem kell.)

Megj: $f=0$, $n=1$ dimenzió



$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{g(\xi)}_{\text{egy részen } >0} \underbrace{\exp(\dots)}_{>0}\, d\xi > 0 \quad \forall t>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ a hatás végtelen sebességgel terjed a modell szerint. (A valóság nem et: ha megnyújtunk egy gumifát, az nemre nem érezhető.)

Megj. Brown-mozgásnál a köv. egyenlet megjelenik (Einstein)

Eddig volt: diszkrétidő alapmo.-k $\xrightarrow{\text{ill.}}$ nullámegszűnt köv. egyenlet Cauchy-feladata

$t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$

A Poisson-feladatot nem a teljes térre nőrás nézni.

Poisson-egyenlet:

$-\Delta u = f$ időfüggetlen, ált. $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korl. tartomány

1tt kezdeti feltétel nincs, peremfeladat van

Ennél általánosabban nézzük.

Peremérték-feladatok

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \quad \Omega\text{-n},$$

ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$,

$q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$ (ezek a feltételek később lesznek fontosak)

Emlék: $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{grad} v = (\partial_1 v, \dots, \partial_n v) = \nabla v$

$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$

$w: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\operatorname{div} w = \sum_{j=1}^n \partial_j w_j$, ahol $w = (w_1, \dots, w_n)$

Div.: forrássűrűség: ha pozitív, azért ott fogy,
ha negatív, azért nyelő. (pl. folyadék, hő)

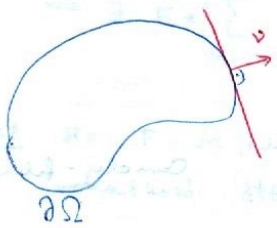
$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div}(\partial_1 u, \dots, \partial_n u) = \partial_1^2 u + \dots + \partial_n^2 u = \Delta u$

$\nabla \nabla = \nabla^2 = \Delta$

Visszatérve: $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^n \partial_j (p \partial_j u) = \sum_{j=1}^n (p \partial_j^2 u + \partial_j p \cdot \partial_j u) =$

$= \underbrace{p \Delta u}_{\text{főrész}} + \sum_{j=1}^n \partial_j p \cdot \partial_j u$

Peremfeltételek: 1.) Dirichlet-pf. (első pf.): $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ adott



2.) Neumann-pf. (második pf.)

ν külső egységnormális, $\partial_\nu|_{\partial\Omega} = \varphi$ adott

A peremen átáramló mennyiséget (pl. hőáram) adjuk meg.

3.) (Robin-pf.) harmadik pf.

$g \cdot u|_{\partial\Omega} + h \cdot \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$, ahol

$g, h \in C(\partial\Omega)$ és $gh \geq 0$ és egyszerre nem nullák sehelyiz pontban (a feltétel értelme később)

Így kapjuk a különféle peremérték-feladatokat: Dirichlet-feladat,
Neumann-feladat,
harmadik * p.é.f.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ elég sima (kell, hogy m.m. legyen normálvektor) 2017.04.

A megoldásra követelmények:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ 2-3.) & u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \end{array}\right\} \text{ kényelmesebb: } u \in C^2(\overline{\Omega})$$

Green-formulák

Tétel. (Gauss–Osztrogradszkij skalármezőre)

$$g: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad g \in C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow \int_\Omega \partial_j g = \int_{\partial\Omega} g \cdot \nu_j \, d\sigma$$

felszín szinti

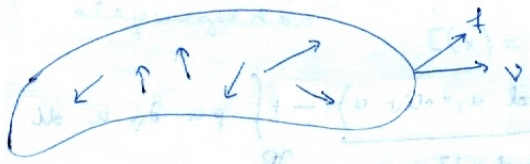
ν j-edik koordinátája

Tétel. (Gauss–Osztrogradszkij vektormezőre)

$$f: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \quad g \in C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} f = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, d\sigma$$

B: skalárváltozat f koordinátafüggvénye, Σ

Mj.



$$\int_\Omega \operatorname{div} f \approx \sum_\Omega (\text{forrás} - \text{nyelő})$$

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, d\sigma \approx \sum_{\partial\Omega} (\text{ki} - \text{be-áramlás})$$

Tétel. (Green 1. formulája, antiszimmetrikus Green-formula)

$$u \in C^2(\overline{\Omega}), \; v \in C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega v \cdot (-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)) = + \int_\Omega p \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u \rangle - \int_{\partial\Omega} p v \partial_\nu u \, d\sigma$$

B: GO skalár $g = p v \partial_j u$ -ra:

$$\int_\Omega \underbrace{\partial_j (p v \partial_j u)}_{p \cdot \partial_j v \partial_j u + v \cdot \partial_j (p \partial_j u)} = \int_{\partial\Omega} p v \partial_j u \, \nu_j \, d\sigma$$

$$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} \int_\Omega p \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u \rangle + \int_\Omega v \cdot \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \int_{\partial\Omega} p v \partial_\nu u$$

Ez voltaképp egy parciális integrálás (1 dimenzióban konkrétan azt adja: $\int_a^b -v u'' = \int_a^b u' v' - [u' v]_a^b$)

Tétel. (Green II. formulája, szimmetrikus Green-formula)

$u, v \in C^2(\bar{\Omega}) \Rightarrow$

$$\int_\Omega v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \int_\Omega u \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v) = \int_{\partial\Omega} p v \partial_\nu u \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} p u \partial_\nu v \, d\sigma.$$

B: Antisznimm. u, v-re, v, u-ra, majd kivonás. $\square$

Harmadik peremértékfeladat megoldásának egyértelműsége

$$\begin{cases} Lu = f, & g \cdot u|_{\partial\Omega} + h \cdot \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Tétel. $p > 0$, $q \geq 0$, $g \cdot h \geq 0$, $g + h \neq 0 \Rightarrow$ a 3. PÉF-nak legfeljebb 1 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ megoldása van, kivéve ha $q \equiv 0$, $g \equiv 0$ (azaz Neumann-feladat): ekkor a homogén feladatnak pontosan a konstans függvény a megoldásai, tehát ebben az esetben ha van megoldás, akkor ∞ sok van (és csak konstansban térnek el egymástól).

B: Ha $Lu_1 = f$, $Lu_2 = f$ + peremfeltétel $\Rightarrow L(u_1 - u_2) = 0$ + peremfelt.
Emiatt elég a homogén esetet vizsgálni.

Tfh. $Lu = 0$, $g u|_{\partial\Omega} + h \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0$

1. Green-formula $u = v$-re:

$$\underbrace{\int_\Omega u \underbrace{(-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu)}_{=0}}_{=0} = \underbrace{\int_\Omega p \underbrace{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)}_{|\operatorname{grad} u|^2 \geq 0} + qu^2}_{\geq 0} + \int_{\partial\Omega} p u \partial_\nu u \, d\sigma \qquad (*)$$

$g u|_{\partial\Omega} + h \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = -\frac{g}{h} u|_{\partial\Omega}$, ahol $h(x) \neq 0$.

Ha $h(x) = 0 \Rightarrow g(x) \neq 0 \Rightarrow u(x) = 0$, azaz ezek nem jelennek meg az integrálban.

$$S := \{x \in \partial\Omega \mid h(x) = 0\}$$

$$\int_{\partial\Omega} p u \partial_\nu u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega \setminus S} p u \partial_\nu u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega \setminus S} \underbrace{p u^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(-\frac{g}{h}\right)}_{\leq 0} d\sigma \leq 0$$

$\Rightarrow$ (*) jobb oldalán minden 0 kell legyen

$\Rightarrow \operatorname{grad} u = 0 \Rightarrow u = c \in \mathbb{R}$

$$g \cdot c + h \cdot 0 = 0$$

Ennek $c=0$-n kívül pontosan akkor van megoldása, ha $g \equiv 0$.

$$qc^2 = 0 \underset{c \neq 0}{\Rightarrow} q \equiv 0.$$

<u>Def.</u> Sajátérték-feladat: $Lu = \lambda u$ + homogén peremfeltétel.

Ha λ olyan, hogy $\exists u \neq 0$ megoldás $\Rightarrow$ λ sajátérték, u sajátfv.

<u>Köv.</u> A 3. SÉF sajátértékei nemnegatívak, sőt $\lambda = 0$ sajátérték $\Leftrightarrow$ $q \equiv 0$ és $g \equiv 0$ (Neumann-pfelt.). Ekkor a 0-hoz tartozó sajátvektor a konstans fvény.

B: $Lu - \lambda u = 0$ + pfelt.

$$\tilde{L}u = Lu - \lambda u = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \underbrace{(q-\lambda)}_{\tilde{q}} u = 0 \quad + \text{ homogén pfelt.}$$

Ha $\lambda < 0 \Rightarrow \tilde{q} > 0$, ez az előző miatt csak $u = 0$ mo.

Ha $\lambda = 0 \Rightarrow$ csak $g = 0$, $q = 0$ mellett van nemtriv mo., a konstansok.

Miképp állítható elő a megoldás spec. esetben?

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$ Dirichlet-feladat Poisson-egyenletre.

Ennek: alapmegoldás

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n \cdot (n-2) \cdot |x|^{n-2}}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } n \geq 3, \end{cases}$$

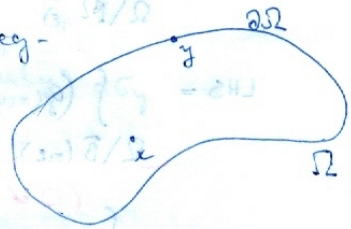
ahol $\omega_n = |S^n|$ felszíne.

<u>Green-függvény</u>

Tekintsük a $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$ feladatot.

<u>Def.</u> Ennek a feladatnak tartozó Green-fvényt a következőképp értelmezzük. Tfh. $\forall x \in \Omega$ rögzítésre $\exists v_x \in C^2(\bar{\Omega})$ megoldása a $-\Delta v_x(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$

$v_x(y) = E(x-y) \quad \forall y \in \partial\Omega$ feladatnak.



Ekkor $g(x,y) := E(x-y) - v_x(y)$ Green-fv., ahol $x \in \Omega$, $y \in \bar{\Omega}$ és $x \neq y$.

$v_x(y)$ neve: korrektorfüggvény.

Tétel. (A Green-fv. tulajdonságai)

1) $-\Delta_y G(x,y) = 0 \qquad \forall x \neq y,\ x \in \Omega,\ y \in \Omega$

2) $G(x,y) = 0, \quad$ ha $y \in \partial\Omega,\ x \in \Omega$

3) $G(x,y) = G(y,x) \quad \forall x,y \in \Omega,\ x \neq y \qquad$ (szimmetria)

B: 1) $$-\Delta_y G(x,y) = \underbrace{-\Delta_y E(x,y)}_{0,} + \underbrace{\Delta_y v_x(y)}_{0,\ \text{mert def.}} = 0$$

mert E alapmo.

(Belátható, hogy ha $-\Delta E = \delta_0$, akkor $\Delta E(z) = 0 \quad \forall z \neq 0$ klasszikus értelemben is)

2) $v_x(y) = E(x-y)$, ha $y \in \partial\Omega \Rightarrow G(x,y) = 0$.

3) BN. $\square$

Megj. $\quad -\Delta_y G(x,y) = \delta_x$

Tétel. (Green reprezentációs tétele)

Tfh. $\exists u \in C^2(\overline{\Omega})$, hogy $\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-n} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$

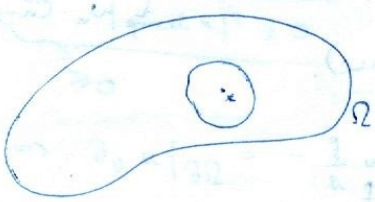
Akkor

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) \cdot f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y G(x,y)\, \varphi(y)\, d\sigma_y$$

3.20.

B: $x \in \Omega$

$\exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subseteq \Omega$



Green II. formulája az

$\Omega \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$ tartományon: $v(y) = G(x,y)$ szerepcsere

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon)} \Big(G(x,y)\,\Delta u(y) - u(y)\,\Delta_y G(x,y)\Big)\, dy = \int_{\partial(\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon))} G(x,y)\,\partial_\nu u(y) - u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y)\, d\sigma_y$$

$$\text{LHS} = \int_{\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon)} \Big(G(x,y)\cdot(-f(y)) - u(y)\cdot 0\Big)\, dy = -\int_{\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon)} G(x,y)\, f(y)\, dy =$$

$$= \underbrace{-\int_{\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon)} \underbrace{E(x-y)}_{\text{alapmo.} \Rightarrow \text{lok. int.}}\, \overbrace{f(y)}^{\in C(\overline{\Omega})}\, dy}_{\downarrow\ \varepsilon\searrow 0\ \text{(Lebesgue)}} + \underbrace{\int_{\Omega\setminus\overline{B}(x,\varepsilon)} \underbrace{v_x(y)}_{\in C^2(\overline{\Omega})}\, \overbrace{f(y)}^{C(\overline{\Omega})}\, dy}_{\downarrow\ \varepsilon\searrow 0\ \text{(Lebesgue-tétel, kar. fv.)}}$$

$$-\int_\Omega E(x-y)\, f(y)\, dy + \int_\Omega v_x(y)\, f(y)\, dy = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy$$

$$\text{RHS} = \int_{\partial(\Omega\setminus\bar{B}(x,\varepsilon))} \Big(G(x,y)\,\partial_\nu u(y) - u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y) \Big)\, d\sigma_y =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Big(\underbrace{G(x,y)}_{0}\,\partial_\nu u(y) - u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y) \Big)\, d\sigma_y + \int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} \Big(\underbrace{G(x,y)\,\partial_\nu u(y)}_{①} - \underbrace{u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y)}_{②} \Big)\, d\sigma_y$$

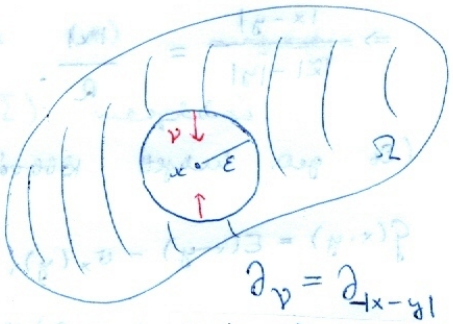
$$= -\int_{\partial\Omega} u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y)\, d\sigma_y + \int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} ① - ②\, d\sigma_y$$

$$① \quad \int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} \Big(G(x,y)\,\partial_\nu u(y) \Big)\, d\sigma_y =$$

$$= \int_{\partial\bar{B}(x,y)} E(x-y)\,\partial_\nu u(y) - \underbrace{\int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} v_x(y)\,\partial_\nu u(y)}_{\to 0 \ (\varepsilon \searrow 0)} = \qquad n \geq 3\text{-ra}$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\bar{B}(x,y)} \frac{1}{\omega_n (n-2)\,|x|^{n-2}}\,\partial_\nu u(y)\, d\sigma_y}_{\leq \text{const}\cdot\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-2}}\cdot \varepsilon^{n-1}\cdot\omega_n = \text{const}\cdot\varepsilon \searrow 0} + \dots \qquad \Rightarrow \int ① \to 0 \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

$$② \quad \int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} -u(y)\,\partial_\nu^y G(x,y)\, d\sigma_y = *$$



$$\partial_\nu^y G(x,y) = \partial_\nu^y \big(E(x-y) - v_x(y) \big) =$$

$$= \partial_\nu^y \left(\frac{1}{\omega_n (n-2)\,|x-y|^{n-2}} \right) - \partial_\nu^y v_x(y) =$$

$\partial_\nu = \partial_{|x-y|}$

sugár ellentétje szerinti derivált

$$= \frac{1}{\omega_n\,|x-y|^{n-1}} - \partial_\nu^y v_x(y)$$

$$* = -\int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} \frac{1}{\omega_n |x-y|^{n-1}}\, u(y)\, d\sigma_y + \underbrace{\int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} \partial_\nu^y v_x(y)\cdot u(y)\, d\sigma_y}_{\to 0 \ (\varepsilon \searrow 0)} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial\bar{B}(x,\varepsilon)} u(y)\, d\sigma_y}_{\substack{\text{felszín} \\ \text{átlag} \Rightarrow \to -u(x) \ (\varepsilon \searrow 0)}} + \dots \quad \Big\} \to -u(x) \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

(precízen szudőr-elv, tisztán Bocsés min-maximumal)

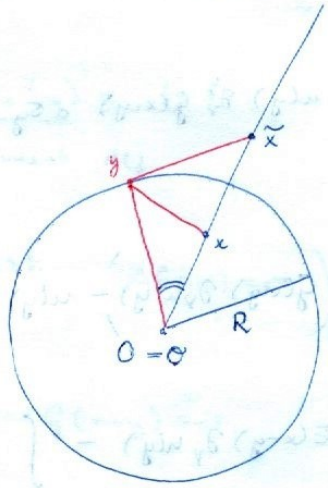
Átrendezéssel a tétel adódik.

Poisson-formula

Green repr. t. alk. $\Omega = B(0,R)$, $f=0$ mellett:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & B(0,R)\text{-en} \\ u|_{\partial B(0,R)} = \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = -\int_{\partial B(0,R)} \partial_\nu^y g(x,y)\,\varphi(y)\,d\sigma_y.$$



Mi a $g(x,y)$? Inverzióval mat. meg:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \tilde{x}$$

$\tilde{x}$ az $\overline{\mathcal{O}x}$ félegyenesen az a pont, amire $|x|\cdot|\tilde{x}| = R^2$

$$\tilde{x} = \frac{R^2}{|x|^2}\cdot x$$

Áll. $y \in \partial B(0,R) \Rightarrow |x-y| = \frac{|x|}{R}|\tilde{x}-y|$.

B: Az $\mathcal{O}xy\,\Delta \sim \mathcal{O}y\tilde{x}\,\Delta$, mert 1 4 szög és

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|\tilde{x}|} \quad \text{def. miatt.}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{|\tilde{x}-y|} = \frac{|x|}{R}. \qquad \square$$

(Ez geo. helyett többvált. analízissel is kihozható.)

$g(x,y) = E(x-y) - v_x(y)$, ahol $\begin{cases} -\Delta_y v_x(y) = 0 & B(0,R)\text{-en} \\ v_x(y) = E(x-y) & \partial B(0,R)\text{-en} \end{cases}$

Emiatt $v_x(y)$-nek magában jó $E(x-y)$; a gond, hogy $y=x$-ben $-\Delta_y E(x-y) \neq 0$.

Ezt a singularitást az inverzióval szeretjük ki: kivisszük vele x-et $B(0,R)$-ből, helyette lehet $\tilde{x}$-nek odalapozni.

$\longrightarrow$ legyen $v_x(y) := E\left(\frac{|x|}{R}\cdot(\tilde{x}-y)\right)$

$y \in \partial B(0,R)$-re $\quad v_x(y) = E\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x}-y)\right) = E(x-y)$ az áll. miatt

$y \in B(0,R)$-re $\quad -\Delta_y v_x(y) =$ (E csak az argumentum hosszától függ)

$$= -\Delta_y E\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x}-y)\right) = 0,$$

ugyanis $v_x(y)$ $x \neq 0$-ra nyilván jó, $x=0$-ra pedig $v_0(y) = E(R) =$

$$= \frac{1}{\omega_n (n-2) R^{n-2}}.$$

abuse of notation

Ebből már a Green-függvény is megvan:

$$g(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x}-y)\right)$$

Kell még $\partial_\nu^y g(x,y)$ a peremen.

<u>Áll.</u> (BN) $$\partial_\nu^y g(x,y) = -\frac{R^2 - |x|^2}{R \cdot \omega_n \cdot |x-y|^n} \quad \forall x \in B(0,R) \quad \forall y \in \partial B(0,R).$$

A bizonyítás nem nehéz, többször deriválni kell.

Tehát:

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\,\omega_n} \cdot \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y. \qquad (*)$$

Ez a <u>gömbre vonatkozó Poisson-formula</u>,

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\,\omega_n} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$ a gömbre von. Poisson-mag.

Belátható, hogy ha $\varphi \in C(\partial B(0,R))$, akkor $(*)$ megoldja a kiindulási feladatot, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldás.

<u>Mj.</u> $n=2$-re: $x = (r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)$

$$u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - t) + r^2}\, u(R\cos t, R\sin t)\, dt$$

$\partial B(0,R) = \{(R\cos t, R\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$, az ezen vett felületi integrál vonalintegrál $\longrightarrow$ bejön egy R-es szorzó, kioltja a nevezőben lévőt

$$|x-y|^2 = (r\cos\vartheta - R\cos t)^2 + (r\sin\vartheta - R\sin t)^2 = r^2 + R^2 - 2Rr(\cos\vartheta\cos t + \sin\vartheta\sin t) = r^2 + R^2 - 2Rr\cdot\cos(\vartheta - t)$$

Ez Rft-ben a Cauchy-integráleszközökből jön ki.

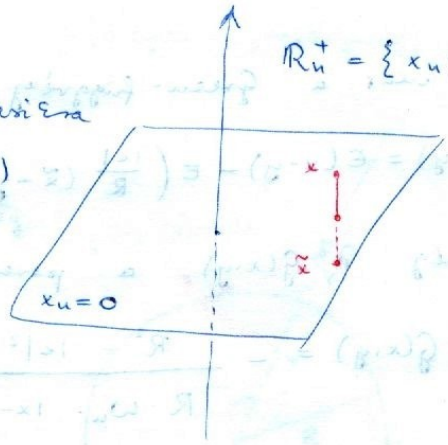
Az ott elegánsabb, de csak az $n=2$ esetet adja ki.

Ny Poisson-formula más tartományra:

Feltér (nem korlátos, de ez nem lényeg)

Kijön $R \to \infty$-nel a gömbből.

Vagy inverzió: $x \mapsto \tilde{x}$ a hipersíkra tükrözés, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_n)$



$\vdots$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{\mathbb{R}^+_n} \frac{2x_n}{\omega_n} \cdot \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma_y$$

Szoboljev-féle függvénytérek

2017. 04. 27.

Eddig klasszikus mo. most gyenge mo.: gyengébb értelemben differiál.

<u>Def.</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ elég sima. Tekintsük a $C^k(\overline{\Omega})$ teret a szokásos műveletekkel. Ezen értelmezzük a köv. skalárszorzatot:

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} \partial^\alpha f \cdot \partial^\alpha g = \sum_{|\alpha|\le k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Ezzel $(C^k(\overline{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér (prehilbert tér). Ennek a teljessé tétele a $H^k(\Omega)$ Szoboljev-tér. Hasonlóan $(C_0^k(\overline{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ telj. tétele $H_0^k(\Omega)$.

Emlék: a teljessé tétel a Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályai.

Ebben az esetben hogy teljesül ez megfogalmazódik?

Legyen $(f_j) \subset C^k(\overline{\Omega})$ Cauchy az indukált normában, azaz

$$\underbrace{\|f_j - f_\ell\|_{H^k(\Omega)}}\longrightarrow 0, \text{ ha } j,\ell\to\infty$$

$$\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f_j - \partial^\alpha f_\ell\|^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \forall |\alpha|\le k \quad \|\partial^\alpha f_j - \partial^\alpha f_\ell\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0$$

$\Rightarrow (\partial^\alpha f_j) \subset C^k(\overline{\Omega})$ Cauchy $L^2(\Omega)$-ban, ami az RFT miatt Banach $\Rightarrow \partial^\alpha f_j \to f^{(\alpha)}$ $L^2(\Omega)$-ban valamely $f^{(\alpha)} \in L^2(\Omega)$-ra.

Legyen $f := f^{(0)}$.

<u>Áll.</u> $f^{(\alpha)} = \partial^\alpha f$ disztribúcióként.

B: kell, hogy $T_{f^{(\alpha)}} = \partial^\alpha T_f$, azaz $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$-ra

$$T_{f^{(\alpha)}}(\varphi) \overset{?}{=} \partial^\alpha T_f(\varphi)$$

$$\int_\Omega f^{(\alpha)}\varphi \overset{?}{=} (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega f\cdot\partial^\alpha\varphi$$

$$f_j \in C^k(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \partial^\alpha f_j\,\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f_j\,\partial^\alpha\varphi \quad \text{(disztr. deriv. tul.)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow (j\to\infty)$$

$$\int_\Omega f^{(\alpha)}\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\cdot\partial^\alpha\varphi$$

mert a bal oldalon: $\left|\int_\Omega \partial^\alpha f_j\varphi - \int_\Omega f^{(\alpha)}\varphi\right| \le \left|\int_\Omega (\partial^\alpha f_j - f^{(\alpha)})\varphi\right| \overset{CBS}{\le}$

$$\le \underbrace{\left(\int_\Omega (\partial^\alpha f_j - f^{(\alpha)})^2\right)^{1/2}}_{\to 0,\ \text{mert } \|\partial^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_{L^2}\to 0} \left(\int_\Omega \varphi^2\right)^{1/2}$$

Jobb oldal hasonlóan.

$\square$

Tehát: (f_j) - ner rendelkezik $f \in L^2(\Omega)$-t, hogy

$\forall |\alpha| \le k$: $\underbrace{\partial^\alpha f}_{\text{disztribuciókban}} \in L^2(\Omega)$

Igaz-e visszafele: ha $f \in L^2(\Omega)$, és $\forall |\alpha| \le k$: $\partial^\alpha f$-ve mint disztribucióra $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$, akkor $f \in H^k(\Omega)$?

Ehhez az kell, hogy f-et $C^k(\bar{\Omega})$-beli szerrel közelíthessük, és ez mindig megtehető (BN). Tehát adódik a következő:

<u>Tétel.</u> $H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \forall |\alpha| \le k : \underbrace{\partial^\alpha f}_{\text{distr.}} \in L^2(\Omega) \right\}$

Fontos $\partial\Omega$ simasága, miértül nem igaz.

De $\partial\Omega$ simasága elhagyható, ha $C^k(\Omega)$-ra értelmezzük a skalárszorzatot, majd ezt a tesztet teszik teljessé. (A szokott ekvivalens.)

Mj. A $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$ azt jelenti, hogy $\exists f^{(\alpha)} \in L^2(\Omega)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega f^{(\alpha)} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi,$$

azaz ennek parc. deriváltja.

$f^{(\alpha)}$-t szokás gyenge deriváltnak is hívni.

<u>Tulajdonságok</u>

1) $k \le l \Rightarrow H_k(\Omega) \supseteq H_l(\Omega)$

2) $\Omega' \subset \Omega$, $f \in H^k(\Omega) \Rightarrow f|_{\Omega'} \in H_k(\Omega')$

Másik irány is igaz: kiterjesztési tétel (BN): $f \in H_k(\Omega')$ kitejeszthető Ω-ra $H_k(\Omega)$-beli szerré.

3) $\Omega' \subset \Omega$, $f \in H_0^k(\Omega') \Rightarrow f$-et 0-ként kitejesztve Ω-ra H^k-beli.

Fordítva nem igaz: $f \in H_0^k(\Omega) \not\Rightarrow f|_{\Omega'} \in H_0^k(\Omega')$.

Mostantól $H^1(\Omega)$-t és $H_0^1(\Omega)$-t tekintjük.

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j f)^2 \right)^{1/2}$$ az eredeti norma.

$$\|f\|'_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^n (\partial_j f)^2 \right)^{1/2}$$ új norma.

Tétel. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátosra $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$

B: $\|f\|' \leq 1 \cdot \|f\|$ pár def. ✓

$$\int_\Omega f^2 \leq C \cdot \int_\Omega \sum_j (\partial_j f)^2$$ kellene a másik irányhoz

(Poincaré-egyenlőtlenség)

Legyen $T \supset \Omega$ téglaa, és f terjedjen ki T-re 0-ként.

Ekkor $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|_{H_0^1(T)}$ és $\|f\|'_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|'_{H_0^1(T)}$, tehát elegendő T-n dolgozni.

$T = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Az f közelíthető $(f_j) \subset C_0^1(T)$ sorozattal. Elég f_j-re biz., majd

Newton–Leibniz* az 1. változóban f-re, $x = (x_1, x')$ jelölésre. $\Big\downarrow$ f tu. $f \in C_0^1(T)$ határátmenet

$$\int_{a_1}^{x_1} \partial_1 f(t, x')\, dt = f(x_1, x') - \underbrace{f(\underbrace{a_1, x'}_{\in \partial T})}_{0}$$

* Ennek kell simával közelíteni.

$$\Rightarrow \quad f^2(x_1, x') = \left(\int_{a_1}^{x_1} \partial_1 f(t, x')\, dt\right)^2 \underset{CBS}{\leq} \int_a^{x_1} (\partial_1 f(t, x'))^2 dt \cdot \int_a^{x_1} 1\, dt$$

$$\leq \int_{a_1}^{b_1} (\partial_1 f(t, x'))^2 dt \cdot \underbrace{(x_1 - a_1)}_{\leq b_1 - a_1}$$

szukcessziv integráció

$$\Rightarrow \int_T f^2 \leq \int_T (\partial_1 f)^2 \cdot \underbrace{\frac{(b_1 - a_1)^2}{2}}_{=:C}$$

□

Köv. $1 \notin H_0^1(\Omega)$, mert $\|1\|'_{H_0^1(\Omega)} = 0$, de $\|1\|_{H_0^1(\Omega)} \neq 0$. □

$\Rightarrow$ $H_0^1(\Omega)$ valódi altér $H^1(\Omega)$-ban.

A korlátosság fontos: $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ (BN).

$H^1(\Omega)$-beli függvények nyoma

Hogy lehet $f \in H^1(\Omega)$ esetén $f|_{\partial\Omega}$-t értelmezni?

A gond az, hogy $\lambda(\partial\Omega)=0$, és L^2-ben a fv-ek csak m.m. egyértelműek.

Ötlet: $f \in H^1(\Omega) \to (f_j) \subset C^1(\overline{\Omega})$, hogy $f_j \xrightarrow{H^1} f$

Ekkor $f_j|_{\partial\Omega}$ értelmes. Belátjuk, hogy $f_j|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ és szeretnénk, hogy $j \to \infty$ esetén legyen limesz $L^2(\partial\Omega)$-ban.

<u>Tétel.</u> $f \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol Ω korlátos. Ekkor

$$\|f|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

BV: Ω helyett $T \supset \Omega$ téglatest, a simaság most nem gond, valamelyik változóban NL-fomula, ∂T lapokból áll.

Tekintsük az $L: C^1(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega)$,

$$f \mapsto f|_{\partial\Omega} \quad \text{operátort.}$$

Nyilván lineáris, és a fenti tétel miatt folytonos.

Mivel $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ sűrű, ezért L egyértelműen kiterjeszthető $H^1(\Omega)$-ra korl. lin. operátorként.

<u>Def.</u> A kiterjesztett operátor a nyomoperátor:

$$H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$
$$f \mapsto f|_{\partial\Omega} \quad f \text{ nyoma } \partial\Omega\text{-n.}$$

Belátható, hogy $f \in H_0^1(\Omega) \iff f \in H^1(\Omega)$ és $\underbrace{f|_{\partial\Omega}}_{\text{nyomértelemben}} = 0$.

2017.05.04. <u>$H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ beágyazása $L^2(\Omega)$-ba</u>

Világos, hogy $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, sőt a beágyazásoperátor: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ folytonos. Ugyanis $\|f\|_{L^2} \leq 1 \cdot \|f\|_{H^1}$. Ugyanígy $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ is folytonos.

Ennél több is igaz:

Tétel. (BN) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt operátorok (Ω korlátos és olyan, mint eddig).

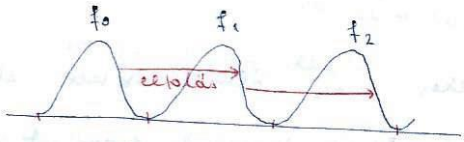
Ennek: a kptság azt jelenti, hogy minden $H^1(\Omega)$-beli (ill $H_0^1(\Omega)$-beli) korlátos sorozatnak van $L^2(\Omega)$-ban konvergens részsorozata.

A bizonyítás a következőn múlik:

Tétel. (BN) (Poincaré) Legyen T egy a élhosszúságú kocka $\mathbb{R}^n$-ben, legyen $f \in H^1(T)$. Ekkor
$$\int_T f^2 \le \frac{1}{a^n}\left(\int_T f\right)^2 + \frac{a^2 n}{2}\int_T \sum_{j=1}^n (\partial_j f)^2$$

Ennek a bizonyításához $f(y) - f(x)$-et írjuk fel mindig csak egy koordináta változtatásával $\to$ kleszkópikus összeg, lehet rá NL-formulát alkalmazni.

Nem korlátos Ω-ra nem igaz a beágyazási tétel: pl. $\Omega = \mathbb{R}$



f_n korlátos $H^1(\Omega)$-ban

De nincs $L^2(\Omega)$-ban konvergens részsorozata.

Peremérték-feladatok megoldása

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \qquad p \in C^1(\overline{\Omega}) \quad p > 0$$
$$q \in C(\overline{\Omega}) \quad q \ge 0$$

+ peremfeltétel. Dirichlet: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$

Klasszikus mo.: $f \in C^2(\overline{\Omega})$

Cél: a megoldás fogalom szigorítása a H^1 térben.

Ötlet: beszorzunk a $v \in C_0^1(\Omega)$ próbafüggvénnyel és integrálunk Ω-n.

$$\Rightarrow \int_\Omega \Big(\underbrace{-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)}_{\text{erre Green I.}} + qu\Big) v = \int_\Omega f v$$

$$\int_\Omega \Big(p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbb{R}^n} + quv\Big) - \underbrace{\int_{\partial\Omega} pv\, \partial_\nu u \, d\sigma}_{0,\ \text{mert } v \in C_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega)$$

Határátmenettel vesszük: azt állítjuk, hogy ez az egyenlőség minden $H_0^1(\Omega) \ni v$-re is igaz.

Ugyanis ha $\underset{\substack{\cap \\ C_0^1(\Omega)}}{v_j} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ H_0^1(\Omega)}}{v}$, akkor $\left|\int_\Omega f v_j - \int_\Omega f v\right| \overset{CBS}{\leq} \|f\|_{L^2} \cdot \underbrace{\|v_j - v\|_{L^2}}_{\to 0}$,

mert $v_j \to v$ H_0^1-ban $\Rightarrow v_j \to v$ L^2-b

Bal oldalon ugyanígy.

Kapjuk: ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klasszik. mo., akkor $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \left(p \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbb{R}^n} + q u v\right) = \int_\Omega f v$$

Ez értelmes akkor is, ha $u \in H^1(\Omega)$

Sőt még az is elegendő, hogy

$$\left.\begin{array}{ll} p \in L^\infty(\Omega), & p \geq \overset{\overset{\mathbb{R}}{\cup}}{p_0} > 0 \quad \text{m.m.}, \\ q \in L^\infty(\Omega), & q \geq 0 \quad \text{m.m.}, \end{array}\right\} (*)$$
$$f \in L^2(\Omega)$$

<u>Def.</u> $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ és $(*)$. Ekkor az általánosított első peremérték-~~feladatom~~ olyan $u \in H^1(\Omega)$ fv.-t keresünk, hogy $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega \left(p \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbb{R}^n} + q u v\right) = \int_\Omega f v,$$

továbbá $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ nyom értelemben. Ezen u ám. gyenge megoldás, $(*)$ pedig gyenge alak.

<u>Megj.</u> $\varphi = 0$ esetén a gyenge alak egyszerűbben is fogalmazható: keresendő $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény, hogy $\forall v \in H_0^1(\Omega)$: ...

Látjuk, hogy ha u kl. mo. $\Rightarrow$ u gyenge mo.

Visszafele: ha u gyenge mo. <u>és</u> elég sima, akkor $u \in C^2(\overline{\Omega})$. $\Rightarrow$ kl. m

Ugyanis: Green visszafele $v \in C_0^1(\Omega)$ választással kapjuk, hogy

$$\int_\Omega Lu \cdot v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \Rightarrow Lu = f$$

Mert $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^1(\Omega)$-ra $Lu = f$ miatt reg. disztribúciók $\Rightarrow$ mint fv-ek.

Kérdés: gyenge mo. létezik, egyértelmű, folytonosan függ?

Gyenge megoldás létezése

Az egyenértékű feladatért: $u \in H_0^1(\Omega)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \left(p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbb{R}^n} + quv\right) = \int_\Omega fv$$

Új skalárszorzat $H_0^1(\Omega)$-n: $\{u,v\} := \int_\Omega \left(p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbb{R}^n} + quv\right)$

Áll. $\{\cdot,\cdot\}$ valóban skalárszorzat $H_0^1(\Omega)$-n, sőt az indukált norma ekvivalens a $H_0^1(\Omega)$ normájával.

B: Nyilván lineáris mindkét változóban, szimmetrikus.

$$\{u,u\} = \underbrace{\int_\Omega \left(\underset{>0}{p}\,\underbrace{|\operatorname{grad} u|^2}_{\geq 0} + \underset{\geq 0}{q}\,\underset{\geq 0}{u^2}\right)}_{\geq p_0 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \geq 0} \geq 0 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

egyenlőséghez $|\operatorname{grad} u| = 0$ kell

$\rightarrow$ $u = \text{konst.}$ De $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u = 0$.

$\Rightarrow \{\cdot,\cdot\}$ poz. def.

$p_0 \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2$ éppen a $H_0^1(\Omega)$-beli ekvivalens norma négyzete.

$\Rightarrow \{u,u\} \geq c \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

A másik irányhoz

$$\{u,u\} = \int_\Omega p\,|\operatorname{grad} u|^2 + q u^2 \leq \max\left(\|p\|_{L^\infty}, \|q\|_{L^\infty}\right) \cdot \underbrace{\int_\Omega \left(|\operatorname{grad} u|^2 + u^2\right)}_{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

$\Rightarrow \{u,u\} \sim \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$

Az új skalárszorzattal a gyenge alak:

$$\{u,v\} = \int_\Omega f \cdot v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ezt is átírjuk $\{\cdot,\cdot\}$-tal

$\int_\Omega fv$ lin. funk. $H_0^1(\Omega)$-n; $Bv := \int_\Omega fv$, $\quad B: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|Bv\| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \underbrace{\|v\|_{L^2}}_{\leq \|v\|_{H_0^1} \leq C\cdot\sqrt{\{v,v\}}} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2} \sqrt{\{v,v\}}$$

$\square$

$\Rightarrow \|B\| \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow B$ folyt. lin. funkc.

$\{\cdot,\cdot\}$ ekvivalens skalárszorzat a $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-téren.

Riesz – Fréchet-féle repr. tétel: $\exists\, F \in H_0^1(\Omega)$, hogy

$$Bv = \{F, v\}, \quad \text{és} \quad \|B\| = \{F, F\}$$

$\Rightarrow$ A gyenge alak $\{u, v\} = \{F, v\} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Ennek az egyetlen megoldása $u = F$.

És $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|F\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const} \sqrt{\{F, F\}} = \text{const} \cdot \|B\| \leq$

$\leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}$, és ez pont a folytonos függés.

Tehát kijött a következő:

<u>Tétel.</u> $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldás amely másodszor folytonosan függ f-től $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}$ értelemben.

f-től nem függ.

Általánosított peremértékfeladatok

2017. 05. 18.

Def. első PÉF: $u \in H^1(\Omega)$ kell, amire

$$\int_\Omega \left(p \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + q u v \right) = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \text{nyom értelemben,}$$

ahol $p \in L^\infty(\Omega)$, $p \geq p_0 > 0$ m.m., $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$ m.m., $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$

homogén pf.

Tétel. $\varphi = 0$-ra $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge mo.,

u folyt függ f-től: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Ez lát ez a műtétor.

Inhomogén: visszavezetés homogénre.

Tfh. $\exists u_0 \in H^1(\Omega)$, hogy $u_0|_{\partial\Omega} = \varphi$ $\longrightarrow$ $u = u_0 + \tilde{u}$ alakban keresünk, $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$.

$$\Rightarrow \int_\Omega p \langle \operatorname{grad} \tilde{u}, \operatorname{grad} v \rangle + q \tilde{u} v = \underbrace{\int_\Omega f v - \int_\Omega p \langle \operatorname{grad} u_0, \operatorname{grad} v \rangle}_{\text{mint korábban: ez folyt. lin. funk.}}$$

Tétel. Tfh. $\exists u_0 \in H^1(\Omega)$, melyre $u_0|_{\partial\Omega} = \varphi$. Ekkor $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!\, u \in H^1(\Omega)$, hogy u megoldása az inhomogén PÉF-nak, és

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{const} \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

Megj. Az u_0 létezése elég erős megszorítás: ilyen nem mindig van.

A peremfeltétele $L^2(\partial\Omega)$ nem a legalkalmasabb: helyette $H^{1/2}(\partial\Omega)$ tört rendű Szobolyev-tér. (ez törtrendű deriválttal van definiálva)

Általánosított sajátértékfeladatok

Def. A $\int_\Omega \left(p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + quv\right) - \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall H_0^1(\Omega)$ + homogén PÉF: $u|_{\partial\Omega}=0$

feladat ált. s.é.f.; ha λ olyan, hogy $f=0$ esetén $\exists u \in H_0^1(\Omega)$, hogy $u \neq 0$ $\longrightarrow$ λ általánosított sé, u ált. sfvény.

Kérdés: a sértékek előjele, száma stb., a feladat megoldhatósága λ függvényében.

Már láttuk: $\lambda = 0$ nem sé: $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$ mo., és $f=0$-ra $u=0$ mo. $\Rightarrow$ nincs más.

$\{u,v\} = \int_\Omega p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + quv$ (emlék)

$$\longrightarrow \quad \{u,v\} - \underbrace{\lambda \int_\Omega uv}_{\text{ezt is átírjuk}} = \{F,v\} \quad \leftarrow \text{volt} \qquad \tilde{B}(v) = \lambda \int_\Omega uv$$

$$\left|\int_\Omega uv\right| \overset{CBS}{\leq} \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \underbrace{\|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \text{const}} \Rightarrow \text{folyt. lin. funk. } H_0^1(\Omega)\text{-n.}$$

Reprezentációs tétel (Riesz): $\exists!\, G(u)$ reprezentáns, $G(u) \in H_0^1(\Omega)$, hogy $\int_\Omega u \cdot v = \{G(u), v\}$ (u-tól függ)

Kérdés: G milyen operátor? $G: L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$

G lineáris az egyértelműség miatt (gyorsan ellenőrizhető)

G folytonos:
$$\left.\begin{aligned} \|\tilde{B}\| &= \{G(u), G(u)\}^{1/2}, \\ \|\tilde{B}\| &\leq \text{const} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G \text{ folyt. és } \|G(u)\| \leq \text{const} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

funkcionálnorma; op.-norma

Tekintsük a $C: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ beágyazást.

$\tilde{G} := G \circ C, \qquad \tilde{G}: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$

C kompakt, G folytonos $\Rightarrow$ $\tilde{G}$ kompakt

$$\Rightarrow \quad \{u,v\} - \lambda \cdot \{\tilde{G}(u), v\} = \{F, v\} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad u - \lambda \cdot \tilde{G}u = F \qquad \text{operátoregyenlet}, \quad \lambda \neq 0$$

$$\frac{1}{\lambda}u - \tilde{G}u = \frac{1}{\lambda}F \qquad \mu := \frac{1}{\lambda}, \quad \mu F =: \tilde{F}$$

$$\mu u - \tilde{G}u = \tilde{F}$$

Áll. $\tilde{G}$ sig. pozitív önadjungált op.

B.:

$$\{\tilde{G}(u), u\} = \int_\Omega u \cdot u \geqslant 0 \quad \forall u \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ sig. poz.}$$

$$\{\tilde{G}(u), v\} = \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega v \cdot u = \{\tilde{G}(v), u\} = \{u, \tilde{G}(v)\} \quad \Rightarrow \text{ öa.}$$

valósban vagyunk.

$\square$

$\tilde{G}$ kpt., öa., sig. poz. $\Rightarrow$ megpt. sok sajátértéke van, ezek nem nullák, mind véges sokszorosak, pozitívak, és csak 0-ban torlódnak, és a különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak $\{\cdot,\cdot\}$-ra nézve, és a sajátvektorokból legyárthatók egy teljes ortogon. rendszer $H_0^1(\Omega)$-ban $\{\cdot,\cdot\}$-ra nézve.

Továbbá ha μ nem sajátérték, akkor reguláris érték, azaz a megoldás egyértelmű.

Valójában a sajátvektorok $L^2(\Omega)$-ban is ortogonálisak:

$$\{u_1, u_2\} = 0, \qquad u_1 = \frac{1}{\mu}\tilde{G}u_1$$

$$0 = \{u_1, u_2\} = \left\{\frac{1}{\mu}\cdot\tilde{G}u_1, u_2\right\} = \frac{1}{\mu}\{\tilde{G}u_1, u_2\} = \frac{1}{\mu}\cdot\int_\Omega u_1 \cdot u_2$$

$$\Rightarrow \langle u_1, u_2\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ sűrű $\Rightarrow$ a sajátvektorok $L^2(\Omega)$-ban is teljes rendszer.

Köv. Általánosított sé.-ből megpt. sok van, pozitívak, a ∞-ben torlódnak, $H_0^1(\Omega)$-ban és $L^2(\Omega)$-ban a különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak a megfelelő szalárszorzatban, és teljes rendszert alkotnak.

Lásd: Hilbert–Schmidt-tétel, Fredholm-alternatívatétel.