1.1. P, NP, coNP

1.2. séta, zárt séta, séta hossza, elérhetőség

i. út, i. kör, aciklikus digráf, irányítatlan kör

s-fenyő, fenyves, feszítő s-fenyő

<u>Tétel</u>: ha S az s-ből elérhetők halmaza, akkor $\forall S' \subsetneq S, S' \ni s$ -re van S'-ből kivezető él, de nincs S-ből kivezető él. Létezik S-et feszítő s-fenyő.

Algoritmus s-fenyőre.

1.2.1. szélességi keresés

1.2.2. mélységi keresés, elérési idő, elhagyási idő

mélységi fenyő, keresztél

topologikus sorrend

<u>Tétel</u>: aciklikus $\iff \exists$ topologikus sorrend a csúcsokon (véges digráfra)

erősen ö. komponensek

1.3.1. $\mu_c(v)$: a legolcsóbb sv-út költsége

legolcsóbb utak fenyője

általános eset NP-teljes

1.3.2. aciklikus digráfban direkt algoritmus a legolcsóbb utak fenyőjére. (rekurzív), c tetsz.

<u>Tétel</u>: $\mu_c(t) = \max\left\{ \pi(t) - \pi(s) : \pi : V \to \mathbb{R},\ \pi(v) - \pi(u) \le c(uv)\ \forall uv \in A \right\}$.

Ha c egész, akkor π is lehet az.

max. hosszú út negálással, direkt is felírható

PERT-módszer, ütemezés, kritikus út

1.3.3. Dijkstra-algoritmus

<u>Lemma</u>: T legolcsóbb utak s-fenyője $V(T)-n$, $m_T = \min\{\mu_c(v) + c(uv) \mid uv$ kilép $V(T)$-ből$\}$

a-n vétetik fel $\Rightarrow$ $T+a$ is legolcsóbb utak s-fenyője.

naív algoritmus: $O(m \cdot n)$

címkézés: $\mu_T(v)$: $s \rightsquigarrow v$ $V(T)$-n menő utak költségének minimuma,

$e_T(v)$: ezen út utolsó éle

címkézéssel $O(n^2)$-es algoritmus

1.3.4. konzervatív élsége.

megengedett potenciál, pontos él, potenciálkülönbség.

Tulajdonságok:

1) minden st -út költsége azonos, minden egyirányú kör költsége 0, ha c partikulált

2) Ha π megengedett, akkor $\tilde{c}(P) \geq \pi(t) - \pi(s)$, ha $\forall$ él pontos, akkor P legolcsóbb;

$\forall$ K egyirányú köre $\tilde{c}(K) \geq 0$, ha $\forall$ pontos, akkor $\tilde{c}(K) = 0$.

3) Konz. c mellett legolcsóbb út $\forall$ részútja legolcsóbb.

4.) Minden séta tartalmaz egy húrt nem drágább utat.

<u>Gallai-tétel.</u> c konzervatív $\Leftrightarrow$ $\exists$ megengedett π. (egész értékűség)

$\pi_c(v) = \min\{\tilde{c}(P) \mid P$ v végű út$\}$ megengedett, ha c konzervatív

$\pi_c(v)$ egyértelmű legnagyobb nempozitív potenciál.

tenzió: $x: A \to \mathbb{R}$, $\forall$ C köre $\varphi_x(C) = \beta_x(C)$, (azaz egyirányú köre $\tilde{x}(K) = 0$)

<u>Tétel.</u> c tenzió $\Leftrightarrow$ potenciálkülönbség (egész értékűség)

1.3.5. <u>Tétel.</u> Ha D $\forall$ pontja elérhető s-ből, c konzervatív, akkor μ_c az egyértelmű legnagyobb megengedett potenciál, amelyre $\pi(s) = 0$.

<u>Tétel:</u> (legolcsóbb utak rétgráfjának tétele)

Ha D $\forall$ pontja elérhető s-ből, c konzervatív, D_0 a pontos élek rétgráfja, akkor P pontosan akkor legolcsóbb D-ben, ha D_0-ben van.

(Azaz $\forall$ D_0-beli s-folyó a D-beli legolcsóbb utak fenyője.)

<u>Duffin-tétel.</u> $\mu_c(t) = \min\{\tilde{c}(P) \mid P$ st -út$\} = \max\{\pi(t) - \pi(s) \mid \pi$ megengedett$\}$

1.3.6. Javító utas algoritmus $O(m^2)$ egyszerűen megszünteti a hibás éleket, vagy talál $\ominus$ kört

Bellman-Ford-algoritmus: $O(mn)$ rétszámítja π_c-t vagy talál $\ominus$ kört, v végű sétát és utat

Finomított Gallai-tétel: P1 $\Leftrightarrow$ P2 $\Leftrightarrow$ D1 $\Leftrightarrow$ D2,

P1: c konzervatív

P2: BF nem talál neg. kört

D1: $\exists$ megengedett pot.

D2: BF-fém $\pi_c^{(n)}$ megengedett és $\pi_c^{(n)} = \pi_c$.

Bellman-Ford: $O(mn)$, s-ből induló sétát és utat

$\pi_c^{(i)}$ és $\mu_c^{(i)}$ kapcsolata

1.4. hozzárendelési feladat, párosítás, teljes párosítás, max. súlyú párosítás

1.4.1. <u>König-tétel</u>. $\nu(G) = \tau(G)$.

R_S, R_T, Z

König alternáló utas algoritmusa $O(mn)$

$h(X)$ bináris, $\tilde{\tau}$ max-súlyú halmazok

<u>Lemma</u>. élek min. lefogásai $\longleftrightarrow$ max.-súlyú S-beliek

<u>König-Hall</u>. $\exists$ S-et fedő t.p. $\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq S$: $|\Gamma(X)| \geq |X|$; feltételnél kapott S-beliek max. száma = $S \geq X$ max. kiválasztva.

König kiad egy max-súlyú halmazt.

1.4.2. $\pi: V \to \mathbb{R}$ súlyozott lefogás, pontos él, $\tilde{\pi}(V)$

<u>Egerváry-tétel</u>. Max. súlyú t.p. súlya ν_c, minimális összértékű súlyozott lefogás ö.é.-e τ_c,

$\nu_c = \tau_c$. $O(|E| \cdot |S|^2)$

1.4.4. <u>Tétel</u>. Párosítások max. súlya = nemnegatív ö. lefogások min. súlya. (egész értékűség)

$\to$ visszavezetés max. súlyú t.p.-ra

perfekt pont

Direkt algoritmus a visszavezetésre

1.5.1. áram. megmaradási szabály: $\rho_x(v) = \delta_x(v)$

áram költsége: $c \cdot x$

megengedett áram, megmaradási szabály gyengíthető

folyam, megengedett folyam, fonat

folyam nagysága, folyam értéke, k-fonat

cx folyam költsége

1.5.2. szállítási feladat

Menger tétele, élidegen utak

1.5.3. <u>Hoffman</u>: $\exists$ $f \leq x \leq g$ megengedett áram $\Leftrightarrow$ $\rho_f(X) \leq \delta_g(X)$ $\forall X \subseteq V$. (egész értékűség)

általánosított áram, visszavezetés

1.5.4. <u>MFMC</u>: $\exists$ k nagyságú megengedett folyam $\Leftrightarrow$ $\forall S$ st-halmaza $\delta_g(S) \geq k$. (egész értékűség)

$\delta^+(S)$ vágás, kapacitása $\delta_g(S)$

<u>Tétel</u>. Megengedett folyamok max. nagysága = $\delta_g(S)$ minimuma. (egész értékűség)

$\psi_f(X) = \rho_f(X) - \delta_f(X)$, ezzel Hoffman $\Rightarrow$ MFMC

1.6. Ha az opt. feltételek (kilépő élen x max, belépő élen 0) teljesülnek → x max.

1.6.1. Ford–Fulkerson algoritmus növelő utakkal racionális g-re

1.6.2. Skálázási technika

1.6.3. Edmonds–Karp–Dinits: a legrövidebb élszámú növelő út FF-ben → $O(|V| \cdot |A|)$

$D_x(v)$: v távolsága D_x-ben s-től

1.6.4. Ford–Fulkerson: k-faktor minimális értéke

Iterativ bővítés

Általános g függvényre

2.1. lin. komb., aff. komb., poz./nemneg. komb., burok

függetlenség, összefüggőség (lineáris, affin)

Minkowski-összeg

skalárszorzat, merőlegesség

altér, generált altér, homogén hipersík, vetület

lin. trafó

2.2. sortér, oszloptér, nulltér, bal nulltér

Ha egy vektor $\perp$ A soraira, akkor lin. függő tőlük.

Homogén lin. egyenletr.-nek van nemtriv megoldása.

Oszlopok és sorok lineárisan $\Rightarrow$ A négyzetes. Rang.

Primál és duál problémák, rang.

<u>Fredholm</u>. $\exists x : Ax = b \iff \nexists y : yA = 0,\ yb \neq 0$.

2.3. Egyenletr. megoldáshalmaza,

Cramer-szabály.

3.1. lineáris program

3.2. hipersík, homogén hipersík, féltér, konvexitás

kúp, triviális kúp, konvex kúp, (véges) generált kúp, metszetkúp (poliéderkúp)

félegyenes, poláris

poliéder, standard alak, aktív sor, $M_{\bar{z}}$, dimenzió

politóp

mozgásvektor, relatív belső pont, extrém pont

eltolási vektor, eltolási altér, egyenesmentes poliéder

iránykúp, extrém irány

tárnassík, oldal

csúcs

3.3.1. $R = \{x : Qx \le b\} \neq \emptyset$

<u>Tétel.</u> $q \neq 0$-ra $\quad Qq = 0 \iff q$ eltolási vektora R-nek $\iff \exists z \in R : \forall \lambda \in \mathbb{R} : z + \lambda q \in R$

R eltolási altere Q nullterére.

<u>Tétel.</u> q monotonvektora z-nek $\iff Q_z^= q = 0$

<u>Tétel.</u> Ha $\{x : Qx = b\} = \{x' : Q'x' = b'\}$, akkor Q és Q' sortere megegyező, $\forall z$-re $Q_z^=$ és $Q'^=_z$ sortere is.

<u>Tétel.</u> $\{x : Qx = b\} = \{x : Q'x = b'\}$-re Q-nak j oszlopa lin. ftlen $\iff Q'$ megfelelő oszlopai is.

szint, bázismegoldás, erős bázismegoldás (csak R-től függ)

<u>Tétel.</u> 1) $M = \binom{P}{Q}$-ra $Px = b_0$, $Qx \le b_1$-nek z mo. bmo.ja, ha $r(M) = r(M_z^=)$.

2) $\{Ax = b, x \ge 0\}$-nak z mo. bmo. $\iff z$ pozit. elemű tart. oszlopok lin. ftlenek.

3) $\{yA \ge 0, yb = -1\}$-nek y_0 mo. bmo. $\iff y_0$-ra $\perp$ A-beli oszlopok max. száma $r(A,b) - 1$.

<u>Tétel.</u> $\forall$ megoldható rendszernek van bmo.-ja: a minimális mintái elemek.

$\exists$ ebmo.: minimális sor Q-t tartalmazó bmo.

<u>Tétel.</u> $Qx \le b$-nek z ebmo. $\iff \exists\ r(Q) \times r(Q)$-s nemszinguláris résmátrix, amire $Q'x' = b'$ kieg. z.

<u>Köv.</u> Véges sok ebmo. van.

3.3.2. <u>Tétel.</u> Q oszlopai lineárisan ftlenek és z bmo. $\iff z$ csúcs $\iff z$ extrém.

<u>Köv.</u> Csak véges sok csúcs létezik.

<u>Tétel.</u> Q oszlopai lineáris ftlen. $\iff R$ egyenesmentes $\iff R$ elt. altere triv. $\iff R$ csúcsos

~~Tétel. $R \neq \emptyset$ előáll mint A csúcs és R' csúcsos poliéder összege~~

3.3.3. <u>Tétel.</u> $q \neq 0$-ra: $\quad Qq \le 0 \iff \vec{q}$ iránya R-nek $\iff \exists z \in R : \{z + \lambda q : \lambda \ge 0\} \subset R$.

<u>Köv.</u> R irányrúpja $M_Q = \{x : Qx \le 0\}$.

<u>Tétel.</u> R nem tart. félegyenes $\iff R$ a véges sok csúcsának lx. burka $\iff R$ korl. $\iff R$ irányrúpja triv.

3.4.1. FM-elimináció

Metszetrúp ill. poliéder tengelyszerű vetülete is ns.

3.4.2. Politóp + genrúp = poliéder, politóp = korl. poliéder, gen. rúp $\subset$ metszetrúp.

FL geo.: $C \subseteq \mathbb{R}^k$ genrúp, $b \in \mathbb{R}^k$, $b \notin C \Rightarrow \exists$ hom. fiktív, ami tart. C-t, de b-t nem.

FL std.: $\exists x : Ax = b, x \ge 0 \iff \nexists y : yA \ge 0, yb < 0$.

<u>Lemma</u> $G_A \supseteq M_B \to M_A \subseteq G_B$; $G_A \subseteq M_B \Rightarrow G_B \subseteq M_A$; $G_A = M_B \iff M_A = G_B$.

metszetrúp előáll genrúpként

(NB) $R \neq \emptyset$ előáll politóp és genrúp összegeként, $\forall$ korl. poliéder politóp.

(NB) $R \neq \emptyset$ egyenesmentes $\to$ a csúcsai politópjának és a karakterisztikus rúp összege.

3.5. <u>Tétel</u>$^{(FL)}$. Vagy a primál, vagy a duál bárismegoldható.

FLA: $\exists x: Qx \le b \iff \nexists\, y \ge 0: \; yQ = 0,\; yb = -1.$

FLB: $\exists x \ge 0.\; Bx \le b \iff \nexists\, y \ge 0 \;\; yB \ge 0,\; yb = -1.$

FL^{Fr}: $\exists x: Px = b_0,\; Qx \le b_1 \iff \nexists y: \; y_0P + y_1Q = 0,\; y_1 \ge 0,\; yb = -1.$

FL ált.: $\exists x \;\; Px_0 + Ax_1 = b_0,\; Qx_0 + Bx_1 \le b_1,\; x_1 \ge 0 \iff$

$\nexists y: \; y_0P + y_1Q = 0,\; y_0A + y_1B \ge 0,\; y_1 \ge 0,\; y_0b_0 + y_1b_1 = -1.$

3.5.1. (FL std. bz.) direkt módon

3.5.2. Simplexalgoritmus, Bland-szabály

Végesség, ciklizálás.

4.1. c-növelő irány

<u>Lemma</u>. $Qz \le b$; $c \in \mathbb{R}^n$. $\nexists q: \; cq > 0$ és $Qq \le 0 \implies \exists x^*$ ehmo., hogy $cx^* \ge cz$.

<u>Ir. mentes kar. tétele</u>. $R = \{Qx \le b\} \ne \emptyset$, $c \in \mathbb{R}^n$.

0) cx felülről kor. R-en

1) $\forall z \in R \;\; \exists x^*$ ehmo.: $cx^* \ge cz$

2) $\nexists q: \; cq > 0$ és $Qq \le 0$

3) $\exists y \ge 0, \;\; yQ = c.$

<u>Ált. alak</u>. (NB) $R \ne \emptyset$, $(c_0, c_1) = c$, $R: \{Px_0 + Ax_1 = b_0,\; Qx_0 + Bx_1 \le b_1,\; x_1 \ge 0.\}$

0) cx felülről kor. R-en

1) $\forall z \in R \;\; \exists x^*$ ehmo.: $cx^* \ge cz$

2) $\nexists q: \; cq > 0$ és ~~$Qq \le 0$~~ $q_1 \ge 0,\; Pq_0 + Aq_1 = 0,\; Qq_0 + Bq_1 \le 0$

3) $\exists y = (y_0, y_1): \;\; y_0P + y_1Q = c_0,\; y_0A + y_1B \ge c_1,\; y_1 \ge 0$

4.2.1. szükséges elmozdulás, növelő irány

<u>Tétel</u>. $R = \{x: Qx \le b\} \ne \emptyset$ és $\{cx : x \in R\}$ f. kor. $x^* \in R$:

1) $cx^* \ge cx \;\; \forall x \in R$ (x^* opt.)

2) $\nexists$ c-növelő irány

3) $c \in$ (x^* akt. sorainak kúpja)

Tétel. ugyanez általánosan.

4.2.2. primál, duál

Tétel. (DT spec.) $R = \{Qx \le b\} \neq \emptyset$, cx f. korl. $\Rightarrow \max cx = \min\{by : y \ge 0, yQ = c\}$.

DT ált. (NB)

DT szimm. (NB)

5.1.1. TU

Digráf inc. mátrixa TU, pons gráf i. mátrixa TU

Hálózati mátrix, szimmátrixa is az, TU.

5.1.2. Lemma. M TU és b egész $\Rightarrow$ $\forall$ elemi. egész.

Lemma. M TU, c tetsz. K metszetkúp $\Rightarrow$ ha van $x' \in K$, $cx' > 0$, akkor van 0, ±1-es is.

Tétel. Ha a primálban M TU és b egész, akkor van egész mo.. Ha a duál oldható meg, van 0, ±1-es mo.

Tétel. $\forall$ TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.

Tétel. $R = \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\} \neq 0$.

1) cx f. korl.

2) $\nexists x'$ 0, ±1-es, hogy $Px' = 0$, $Qx' \le 0$ és $cx' > 0$

3) $\exists y = (y_0, y_1)$, $y_1 \ge 0$, $yM = c$, (y egész, ha c egész)

Tétel. $R = \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\} \ni x^*$

1) x^* optimális

2) $\nexists x'$ 0, ±1-es, hogy $Px' = 0$, $Q_{x^*}^{=} x' \le 0$ és $cx' > 0$

3) $\exists y = (y_0, y_1)$, $y_1 \ge 0$, $yM = c$, $y(b - Mx^*) = 0$. (y egész, ha c egész)

5.2.1. König-tétel, max. élszigű párosítás

(bináris mátrix, ez a Neumann–Birkhoffhoz köze)

Egerváry-tétel, további általánosítás

5.2.4. Ha f és g egész, akkor a megengedett áramok poliédere is.

A k magpárjai fogyemek megengedett poliédere egész.

Hoffman.