Lineáris algebra zh

2016. december 16.

Megoldások

1. feladat. Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz -2 pontot ér; a válasz hiánya 0 pont. A választ ne a feladatsorra írd, azt nem szedem be.)

a) $\mathbb{R}^n$-ben minden $n+1$ elemű vektorrendszer lineárisan összefüggő.

b) Invertálható mátrixok összege is invertálható.

c) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangja legalább $n/2$, akkor a determinánsa pozitív.

d) Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, akkor $A \sim_{\mathbb{R}} B$.

e) Minden $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja n-edfokú.

Válasz. Igaz (a dimenzió definíciója alapján), hamis (pl. I_2 és $-I_2$ invertálhatók, de az összegük nem), hamis, hamis (a fordított irány igaz), igaz (a definícióból következik).

2. feladat. Oldd meg a következő egyenletrendszert elemi bázistranszformációval! (Más módszerrel való megoldás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 2x_1 \qquad\; + \;\; x_3 &= 6 \\ -x_1 + \;\; x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - \;\; x_2 \qquad\;\; &= 3 \end{aligned}$$

Eredmény. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

3. feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ adott és legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Határozd meg $r(A)$-t és A^{-1}-et (ha létezik)!

Válasz. $\alpha = 0$-ra $r(A) = 2$, így A nem invertálható. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $r(A) = 3$ és $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\alpha & 1/\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/\alpha & 1/\alpha \end{bmatrix}$.

4. feladat. Legyenek $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adottak, továbbá

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; \gamma x + w = 2,\ \delta z - w = y \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; \gamma w + \delta x = 0,\ y = \gamma\delta z \right\}$$

a) Altere-e V_1, illetve V_2 $\mathbb{R}^4$-nek?

b) Ha valamelyik altér, akkor adj meg benne egy bázist, és határozd meg a dimenzióját.

Válasz. V_1 nem altér, mert $\mathbf{0} \notin V_1$. Meghatározzuk V_2 általános elemét a paraméterek függvényében. Ha $\gamma = \delta = 0$, akkor ez $[w,\ x,\ 0,\ z]^\top$, ha $\gamma = 0 \neq \delta$, akkor $[w,\ 0,\ 0,\ z]^\top$, ha $\gamma \neq 0$, akkor $[-\delta/\gamma x,\ x,\ \gamma\delta z,\ z]^\top$. Ellenőrizhető, hogy mindhárom esetben alteret kapunk (ez egyébként esetszétválasztás nélkül, csupán V_2 definíciója alapján is igazolható), és a dimenziók az egyes esetekben rendre 3, 2 és 2.

5. feladat. Számítsd ki azt az $n \times n$-es determinánst, aminek a főátlójában csupa 1-es, azon kívül pedig csupa 2-es áll!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Megoldás. Vonjuk ki az első oszlopot az összes többiből, ezután adjuk hozzá a második, harmadik, $\dots$, n-edik oszlop kétszeresét az elsőhöz. Felsőháromszög-mátrixot kapunk, aminek a főátlójában az első elem $2n-1$, az összes többi -1, így a determináns $(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$.

6. feladat. Legyen $A = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Írd fel A karakterisztikus polinomját!

b) Számítsd ki A sajátértékeit!

c) Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

d) Add meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátaltereket!

e) Állapítsd meg, hogy A diagonalizálható-e (a gondolatmenetet is írd le); ha igen, írj fel egy olyan diagonálmátrixot, amihez hasonló!

Válasz. A karakterisztikus polinomja $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$, a sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-6y \\ 2x-y \end{bmatrix}$, az $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$ és $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$ egyenletek megoldásával kapjuk a sajátvektorokat: $\lambda_1 = 2$ sajátvektorai $\begin{bmatrix} 3/2y \\ y \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ sajátvektorai $\begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix}$ alakúak, ahol $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A sajátaltereket a $\mathbf{0}$ hozzávételével, azaz az $y = 0$ megengedésével kapjuk. Mivel A sajátértékei különböznek, diagonalizálható. Két olyan diagonálmátrix van, amihez A hasonló, ezek $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

7. feladat. Az alábbi mátrixok között melyek hasonlók $\mathbb{R}$ felett? (Teljes megoldásnak az számít, ami a felsorolt mátrixok közül *bármely kettőről* megállapítja, hogy hasonlók-e vagy sem.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A sajátértékek rendre: 1 és -1; 1 (kétszeres); 1 (kétszeres); 1 és -1; 1 (kétszeres). Hasonló mátrixoknak ugyanazok a sajátértéket (multiplicitással), így ami szóba jön: $A \sim D$, $B \sim C$, $B \sim E$, $C \sim E$.

$A \sim D$, mert a sajátértékek különböznek, így D diagonalizálható. C az egységmátrix, ami csak önmagához hasonló, tehát $B \not\sim C$ és $C \not\sim E$. Sem B, sem E nem diagonalizálható, az 1-hez tartozó sajátaltér dimenziója 1, ezért a hasonlóságuk eldöntéséhez a hasonlóság eredeti definíciója kell (vagy a Jordan-féle normálalak). Legyen $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, ekkor $BP = PE$ és P invertálható, tehát $B \sim E$.