Lineáris algebra (A,B,C) **MINTAZH** **2016. november 21–25.**

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA ÍRANDÓ!

1. **I**gazak vagy **H**amisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \det(A) = \det(\lambda^n A)$.

I H $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben $\det(A^{-1}B) = \det(AB)$ minden 1 determinánsú A esetén.

I H Ha $\mathbf{x}_i$ j.o. sajátvektora $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$-nek $(i = 1, 2)$, akkor $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ j.o. sajátvektora $A_1 + A_2$-nek.

I H $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben a hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.

I H Van végtelen sok olyan lineáris transzformáció $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$-ben, amelynek végtelen sok bázisban invertálható a mátrixa.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i,j,k}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i,j,k}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{c}]_{\mathbf{i,j,k}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} =?$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} =?$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b} =?$

3. Számítsa ki az alábbi n–szer n–es ($n \geqq 3$) determináns értékét! (A főátló alatti átlóban végig 0 van.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

4. Határozza meg a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix (jobb oldali) sajátértékeit, sajátvektorait, a sajátaltereket, karakterisztikus polinomját, és döntse el, hogy diagonalizálható-e $\mathbb{R}$ felett!

5. A $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz megadandó SONB (az $\mathbb{R}^2$-ben $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\top\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top\mathbf{x}$ mellett), és meghatározandó a mátrixhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

6. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \beta-\gamma \\ \gamma-\alpha \end{bmatrix}$.

a) φ lineáris transzformáció–e? Ha igen, melyek a sajátértékei, sajátvektorai, van-e SB?
b) φ vektortér–izomorfizmus–e?

7. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A tükröző mátrix ($A^2 = I_n$).
a) Melyek az A lehetséges sajátértékei?
b) Mi lehet $|A + I_n|$?

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: -10–10 pont.