1. Számítsa ki az alábbi ismerős mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 9\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}.$$

2. Számítsa ki az A, A^{-1}, B, B^{-1}, $A+B$, AB és $A^{-1}B^{-1}$ mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

3. Legyen

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}2\\ 5\\ 7\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Kiszámítandó:
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$, $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

4. Határozza meg a következő permutációkban az inverziók számát!

a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$; *b)* $n, n-1, \ldots, 2, 1$; *c)* $2, 3, \ldots, n, 1$.

5. Számítsa ki az alábbi determinánsokat az elemi bázistranszformáció módszerével! A számítások mely része szükségtelen a determináns értékének meghatározásához?

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 13\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 0 & 2\\ 4 & 9 & 2 & 6\\ 3 & 6 & 3 & 9\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 4 & 9 & 6\\ 3 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 7 & 6\end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n\\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0\end{vmatrix} = ?\ , \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \ldots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n\end{vmatrix} = ?$$

7. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! (A túloldali F, G, H, I, J mátrix $n\times n$–es.)

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 7 & 5\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 6 & 1\end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 8\end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 5 & 7\\ 3 & 0 & 9 & 3\\ 4 & 0 & 2 & 8\end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 - b_1 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 - b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 - b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

8. Legyen $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Vizsgáljuk meg V-ben az összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait [a $\mathbb{C}$-vel összehasonlítva], pl. melyek az invertálható mátrixok V-ben?

9. Legyen $W = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Vizsgáljuk meg W-ben az összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait, pl. melyek az invertálható mátrixok W-ben?

10. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

A geometriai vektorok skaláris szorzatának mintájára vizsgáljuk meg $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ műveleti tulajdonságait, kapcsolatát az $\mathbb{R}^n$-beli összeadással és skalárral való szorzással.