Lineáris algebra zh

2016. október 25.

Megoldások

1. feladat. Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz -2 pontot ér; a válasz hiánya 0 pont.)

a) Egy n vektor által generált altér dimenziója legfeljebb n.

b) $\mathbb{R}^n$-ben minden n elemű generátorrendszer bázis.

c) Ha egy mátrix invertálható, akkor az inverze is invertálható.

d) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, akkor $AB \neq \mathbf{0}$-ból következik, hogy $BA \neq \mathbf{0}$.

e) Van olyan lineáris egyenletrendszer, aminek pontosan két megoldása van.

Megoldás. Igaz, igaz, igaz, hamis, hamis. *a*), *b*), *c*), *e*) esetén ez következik az előadáson elhangzottakból; *d*)-re ellenpélda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. feladat. Lineárisan függetlenek-e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$? Igaz-e, hogy $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$?

Válasz. Nem függetlenek: a három vektor összege a nullvektor. Elemi bázistranszformációval vagy egyenletrendszer-megoldással kiderül, hogy második kérdésre a válasz nemleges (a bázistranszformáció végén az egyik sor a bal oldalon csupa nulla, a jobb oldalon nem nulla).

3. feladat. Oldd meg a következő egyenletrendszert elemi bázistranszformációval! (Más módszerrel való megoldás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} - 2x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Válasz. $x_1 = 7, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 2$.

4. feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ adott és legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}$. Határozd meg $r(A)$-t és A^{-1}-et (ha létezik)!

Válasz. Négyzetes mátrix inverze számolható elemi bázistranszformációval, és közben a rangot is megkapjuk. Az $\alpha = 0$ esetben két vektor vihető be a bázisba, tehát ekkor $r(A) = 2$; $\alpha \neq 0$-ra $r(A) = 3$, ekkor van inverz is:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/(2\alpha) & 1/(2\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/(2\alpha) & 1/(2\alpha) \end{bmatrix}.$$

5. feladat. Legyenek $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adottak, továbbá

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \gamma x_1 + \gamma\delta x_2 + \delta x_3 = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \middle| \gamma y_1 + \delta y_2 = 1,\ y_3 = \gamma\delta y_4 \right\}$$

a) Altere-e V_1, illetve V_2 $\mathbb{R}^4$-nek?

b) Ha valamelyik altér, akkor adj meg benne egy bázist.

Megoldásvázlat. V_1-re az altér definíciójában szereplő három tulajdonság ellenőrizhető ebben a formában is, és kiderül, hogy valóban altérről van szó. A bázis meghatározásához célszerű felírni a V_1-beli vektorok általános alakját, ehhez viszont esetszétválasztás kell. Ha $\gamma \neq 0$, akkor egy általános elem $\begin{bmatrix} \delta x_2 + \frac{\delta}{\gamma} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, és ezért $\begin{bmatrix} \delta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta/\gamma \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis. Ha $\gamma = 0$ és $\delta = 0$, akkor a teljes $\mathbb{R}^4$ teret kapjuk, és vehetjük benne a standard bázist. Ha $\gamma = 0$ és $\delta \neq 0$, akkor egy elem $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$, és így $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis.

6. feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami lineárisan függ a többi $m-1$ vektortól. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ez szükségképpen a nullvektor.

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a szóban forgó vektor az $\mathbf{u}_1$. Ez lineárisan függ a többitől, azaz

$$\mathbf{u}_1 = \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

valamely $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$-re. Ha most valamelyik $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$-re $\alpha_i \neq 0$, akkor ez átrendezhető:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\alpha_i} \cdot (\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + \alpha i + 1\mathbf{u}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n),$$

ami azt jelentené, hogy $\mathbf{u}_i$ függ a többi vektortól, ami ellentmond a feltételnek. Tehát mindegyik $\alpha_i = 0$, és ezért $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$.

7. feladat. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ $\mathbb{R}^3$ egy (nem feltétlenül standard) bázisa, és legyen $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$. Milyen feltétel kell fennálljon az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ számokra, hogy $\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}$ is bázis legyen?

Megoldás. Háromdimenziós térben három vektor pontosan akkor bázis, ha lineárisan függetlenek. Ellenőrizzük tehát a lineáris függetlenség definícióját: vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ nem mind nulla számok, hogy $\lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{v}) + \lambda_3(\mathbf{e}_3 + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$? A $\mathbf{v}$ vektor helyére írjuk be a definícióját; ekkor a kapott vektoregyenlettel ekvivalens a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Levonható a következtetés, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Ekkor ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1$, akkor a lambdák lehetnek tetszőleges egyenlő valós számok, és így $\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}$ lineárisan összefüggő; ha nem, akkor oszthatunk $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)$-gyel, és így mindegyik lambda nulla, tehát a vektorok lineárisan függetlenek, azaz bázist alkotnak.

Észrevehető, hogy a bizonyítás ugyanígy működik n darab $\mathbb{R}^n$-beli vektorra is; az $n = 3$ eset annyiban könnyebb, hogy itt hosszadalmasabb számolással az elemi bázistranszformáció is kezelhető alakban maradna a lineáris függetlenség ellenőrzésekor.