Lineáris algebra röpzh

2016. november 22.

A csoport

Feladat. Számítsd ki a következő determináns értékét! Tetszőleges módszer használható, de valamilyen módon jelezd, hogy éppen mit csinálsz. (Konkrét n-re való kiszámítás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(6 pont)

B csoport

Feladat. Számítsd ki a következő determináns értékét! Tetszőleges módszer használható, de valamilyen módon jelezd, hogy éppen mit csinálsz. (Konkrét n-re való kiszámítás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(6 pont)

Megoldás. Az A csoport feladatában az első, a B csoport feladatában az utolsó oszlop szerint fejtsünk ki. Egyetlen nemnulla tag lesz, a sakktábla-szabály szerint a kiszámítandó determináns mindkét esetben a következőre egyszerűsödik:

$$(-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

A továbbiakban a kapott $(n-1) \times (n-1)$-es determinánst számoljuk; a konstans szorzót nem írjuk ki. A determinánst felsőháromszög-alakra hozzuk. Ehhez először az első sor felét kivonjuk a másodikból:

$$.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Most a második sor 2/3-szorosát vonjuk ki a harmadikból:

$$.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

És a harmadik sor 3/4-szeresét a negyedikből:

$$.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

A k-adik lépésben a k-adik sor $k/(k+1)$-szeresét vonjuk ki a $k+1$-edik sorból ($k = 1, 2, 3, \dots, n-2$). Teljes indukcióval látható, hogy ezzel a főátló alatti 1-eseket kinullázzuk, és a következőt kapjuk:

$$.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{5}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-1}{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n}{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

A kapott felsőháromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata teleszkópikus szorzat:

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = n.$$

Tehát az eredeti determináns értéke $(-1)^{n-1} \cdot 3n$.