FUNKCIONÁLANALÍZIS FELADATOK

1. Normált terek, lineáris operátorok

1.1. Feladat. Legyen E vektortér és legyen d metrika E felett. Pontosan akkor létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $d = d_{\|\cdot\|}$, ha d-re teljesülnek az alábbiak:

(1) d transzláció-invariáns, azaz minden $E \ni x, y, z$-re $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,
(2) Minden $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

1.2. Feladat. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, és legyen $p : E \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesülnek a következők:

(1) $p(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$,
(2) $p(\lambda.x) = |\lambda| p(x)$ minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén.

Mutassuk meg, hogy p pontosan akkor norma, ha a $B_p := \{x \in E \,|\, p(x) \leq 1\}$ halmaz konvex!

1.3. Feladat. Legyen p félnorma az E vektortér felett. Ekkor az $M := \{x \in E \,|\, p(x) = 0\}$ halmaz lineáris altere E-nek, és az alábbi

$$\|\cdot\| : E/M \to \mathbb{R}_+; \qquad \|x + M\| := p(x)$$

függvény norma az E/M faktortér felett.

1.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges E normált tér x vektorára fennáll, hogy

$$\|x\| = \inf\{r > 0 \,|\, x \in B_r(0)\} = \inf\{r > 0 \,|\, x \in \overline{B}_r(0)\},$$

ahol $B_r(0)$, illetve $\overline{B}_r(0)$ jelöli az E-beli 0 közepű $r > 0$ sugarú nyílt, illetve zárt gömböt.

1.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha E normált tér, $x \in E$ és $r > 0$, akkor fennáll a $\overline{B}_r(x) = \overline{B_r(x)}$ egyenlőség. Igaz-e ez az összefüggés tetszőleges metrikus térben?

1.6. Feladat. Legyen E normált tér. Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in E$ és r, s olyan pozitív számok, hogy $B_r(x) \subseteq B_s(y)$, akkor szükségképpen $r \leq s$ teljesül. (Más szóval, kisebb sugarú gömb nem tartalmazhat nagyobb sugarú gömböt.) Igaz-e ez az összefüggés tetszőleges metrikus térben?

1.7. Feladat. Legyen E normált tér, és $x, y \in E$ olyan vektorok, amelyekre $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $s, t \geq 0$ mellett $\|sx + ty\| = s\|x\| + t\|y\|$.

1.8. Feladat*. Legyen F valódi zárt lineáris altere az E normált térnek. Mutassuk meg, hogy bármely $0 < \delta < 1$ számhoz létezik olyan $x_\delta \in E$, $\|x_\delta\| = 1$, hogy minden $y \in F$ esetén $\|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta$ (vagyis $\operatorname{dist}_F(x_\delta) \geq 1 - \delta$).

1.9. Feladat. Legyen E vektortér és jelölje $\mathscr{P}$ az E feletti normák halmazát. Mutassuk meg, hogy a normák ekvivalenciája ekvivalencia relációt határoz meg a $\mathscr{P}$ halmazon!

1.10. Feladat. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Mutassuk meg, hogy az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ E feletti normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan r és s pozitív számok, hogy $B_r(0, \|\cdot\|_1) \subseteq B_1(0, \|\cdot\|_2)$ és $B_s(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_1(0, \|\cdot\|_1)$.

1.11. Feladat. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Mutassuk meg, hogy az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ E feletti normák pontosan akkor ekvivalensek, ha tetszőleges E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $x \in E$ vektorra $\|x_n - x\|_1 \to 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

1.12. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden vektortér felett megadható norma! Mutassuk meg, hogy ha E végtelen dimenziós vektortér, akkor létezik E felett két inekvivalens norma!

1.13. Feladat*. Legyen E és F normált tér, legyen továbbá $A : E \to F$ olyan lineáris operátor, amelyre $\operatorname{ran} A$ véges dimenziós. Mutassuk meg, hogy az A operátor pontosan akkor folytonos, ha $\ker A$ zárt.

1.14. Feladat. Legyen E és F normált tér, és legyen $A \in \mathscr{B}(E;F)$ folytonos lineáris operátor. Igazoljuk, hogy ha létezik olyan $x \in E, \|x\| \leq 1$ vektor, amelyre $\|Ax\| = \|A\|$, akkor szükségképpen $\|x\| = 1$.

1.15. Feladat. Legyen E normált tér, és legyen M és N lineáris altér E-ben. Mutassuk meg, hogy ha M zárt és N véges dimenziós, akkor $M + N$ zárt E-ben.

1.16. Feladat. Legyen E normált tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó sorozat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz asszociált $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ numerikus sor konvergens. Mutassuk meg, hogy Banach-térben minden abszolút konvergens sor konvergens. Megfordítva, ha egy E normált tér rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens, akkor E Banach-tér.

1.17. Feladat*. Mutassuk meg, hogy egy végtelen dimenziós Banach-tér algebrai bázisának számossága legalább kontínuum!

1.18. Feladat. Legyen $\{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ugyanazon $\mathbb{K}$ test feletti normált tereknek egy megszámlálható rendszere. Tetszőleges $1 \leq p < +\infty$ szám esetén jelölje

$$E^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_n^p \quad \text{konvergens} \right\},$$

ahol $\|\cdot\|_n$ jelöli az E_n tér normáját. Mutassuk meg, hogy E^p lineáris altere a $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ szorzattérnek, továbbá az alábbi

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_n^p \right)^{1/p}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^p,$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\|_p : E^p \to \mathbb{R}_+$ függvény norma. Hasonlóan, $p = +\infty$ esetén jelölje

$$E^\infty := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_n < +\infty \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy E^∞ szintén lineáris altere a $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ szorzattérnek, továbbá az alábbi

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^\infty,$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\|_\infty : E^\infty \to \mathbb{R}_+$ függvény szintén norma. Mutassuk meg, hogy ha az $\{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ rendszer minden egyes eleme Banach-tér, akkor bármely $p \in [1, +\infty]$ mellett $(E^p, \|\cdot\|_p)$ is Banach-tér.

1.19. Feladat*. Legyenek E és F *valós* vektorterek, ekkor egy $f : E \to F$ függvényt *affin függvénynek* nevezünk, ha minden $t \in [0,1]$ számra és $x, y \in E$ vektorra $f(tx+(1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$.

a) Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor affin függvény, ha létezik olyan $A : E \to F$ lineáris operátor és $b \in F$ vektor, hogy bármely $x \in E$ mellett $f(x) = Ax + b$.
b) Ha E és F valós normált terek, akkor egy $f : E \to F$ folytonos függvény pontosan akkor affin, ha minden $x, y \in E$ vektorokra $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1.20. Feladat. Legyen E vektortér és tetszőleges $z \in E$ rögzített vektor esetén vezessük be a

$$T_z(x) := 2z - x, \qquad x \in E,$$

egyenlőséggel értelmezett $T_z : E \to E$ függvényt. (Ezt a T_z függvényt nevezzük a z-re való középpontos tükrözésnek.) Igazoljuk, hogy T_z olyan affin függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

a) $T_z \circ T_z = I$, ahol I jelöli az $E \to E$ identikus operátort;
b) $T_z(x) - T_z(y) = y - x$;
c) $T_z(x) - x = 2(z - x)$, speciálisan z a T_z leképezés egyetlen fixpontja;
d) Ha $a, b \in E$ tetszőleges vektorok és $z := \frac{a+b}{2}$, akkor $T_z(a) = b$ és $T_z(b) = a$.

1.21. Feladat**. Ha E és F valós normált terek, akkor bármely $f : E \to F$ bijektív lineáris izometria affin függvény. (Ez a *Mazur–Ulam tétel.*)
(*Útmutatás:* Az 1.19 Feladat szerint elegendő azt igazolni, hogy bármely $x, y \in E$ pontok mellett $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ehhez $z := \frac{x+y}{2}$ jelölés mellett igazoljuk, hogy minden olyan $g : E \to E$ bijektív izometria, amely x-et és y-t fixen hagyja, a z pontot is fixen hagyja. Ehhez vegyük észre, hogy ha g ilyen, akkor $T_z \circ g^{-1} \circ T_z \circ g$ is ilyen. Végül használjuk ki, hogy a $g = T_z \circ f^{-1} \circ T_{z'} \circ f$ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ahol $z' = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.)

1.22. Feladat. Jelölje rendre d, illetve c_0, illetve c a $\mathbb{K}$-ban haladó véges tartójú, illetve zérus-sorozatok, illetve konvergens sorozatok $\mathbb{K}$ feletti vektortereit. Mutassuk meg, hogy

$$d \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty_{\mathbb{K}}.$$

Vegyük az $\ell^\infty_{\mathbb{K}}$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ norma ezen vektorterekre való leszűkítését. Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott normált terek közül melyik lesz teljes!

1.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $1 \le p \le +\infty$ esetén $d \subseteq \ell^p_{\mathbb{K}}$, továbbá $p \ne +\infty$ esetén $d \subseteq \ell^p_{\mathbb{K}}$ valódi sűrű altér. Mi lesz d-nek az $(\ell^\infty_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben vett lezártja?

1.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az alábbi

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|, \qquad f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\|_1 : \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ függvény norma. Mutassuk meg, hogy a $(\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes, vagyis nem Banach-tér.

1.25. Feladat. Jelölje E az összes $[0,1]$-en értelmezett $\mathbb{K}$-ba képező Lipschitz-folytonos függvények vektorterét.

a) Mutassuk meg, hogy az

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|, \qquad f \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}} \to \mathbb{R}_+$ függvény norma.

b) Igazoljuk, hogy bármely $f \in E$ esetén $|||f||| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}$.

c) Igazoljuk, hogy $(E, \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ Banach-tér!

1.26. Feladat. Jelölje $x \in \ell^1_{\mathbb{K}}$ esetén

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right|.$$

Mutassuk meg, hogy a $\|\cdot\| : \ell^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma, de $(\ell^1_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ nem Banach-tér!

1.27. Feladat. Jelölje $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ esetén $\mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K})$ az $[a,b]$-n értelmezett $\mathbb{K}$-ba képező folytonosan differenciálható függvények vektorterét.

a) Igazoljuk, hogy az alábbi

$$|||f|||_1 := |||f||| + |||f'||| = \sup_{[a,b]}|f| + \sup_{[a,b]}|f'|, \qquad f \in \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K})$$

egyenlőséggel értelmezett $|||\cdot|||_1 : \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ függvény norma.

b) Mutassuk meg, hogy $(\mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||_1)$ Banach-tér!

c) Mutassuk meg, hogy $(\mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ nem Banach-tér!

1.28. Feladat.** Legyen K kompakt metrikus tér. Egy $M \subseteq \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ függvényhalmazt ekvifolytonosnak nevezünk, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $f \in M$ függvény és $x, y \in K$ pontok mellett $d(x,y) < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy a $(\mathscr{C}(K;\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ Banach-tér egy M részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha M korlátos, zárt és ekvifolytonos. (Ez az *Arzela–Ascoli tétel.*)

1.29. Feladat. A 1.22 feladat jelöléseivel jelölje $x \in c$ esetén $u(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Mutassuk meg, hogy $u : c \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $\|u\| = 1$ és $c_0 = \ker u$.

1.30. Feladat. Legyen K kompakt Hausdorff-tér és $x \in K$ esetén jelölje

$$\delta_x(f) := f(x), \qquad f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K}).$$

Mutassuk meg, hogy a fenti egyenlőséggel definiált $\delta_x : \mathscr{C}(K;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ún. *Dirac-funkcionál* folytonos és $\|\delta_x\| = 1$. (Itt természetesen $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$-t a $|||\cdot|||$ normával tekintjük.)

1.31. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $x \in [a,b]$ esetén tekintsük a

$$\delta_x(f) := f(x) \qquad f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$$

egyenlőséggel értelmezett $\delta_x : \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Dirac-funkcionált. Mutassuk meg, hogy f nem folytonos, ha a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ teret a 1.24 Feladatban bevezetett $\|\cdot\|_1$ normával látjuk el.

1.32. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ és tekintsük a következő

$$u(f) := \int_a^b f, \qquad f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$$

hozzárendeléssel értelmezett $u : \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált.

a) Mutassuk meg, hogy $u \in (\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||)'$ és $\|u\| = b-a$.
b) Jelölje $F := \{f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}) \mid f(b) = 0\}$, ekkor F zárt lineáris altere $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$-nak, továbbá $v := u|_F$ jelölés mellett $v \in F'$ és $\|v\| = b-a$ teljesül, azonban nem létezik olyan $f \in F$, hogy $|||f||| = 1$ és $|v(f)| = b-a$.

1.33. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tekintsük az alábbi $T : \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}) \to \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$,

$$Tf := f', \qquad f \in \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K})$$

hozzárendeléssel értelmezett lineáris operátort.
a) Mutassuk meg, hogy $T : (\mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||) \to (\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ nem folytonos!
b) Mutassuk meg, hogy $T : (\mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||_1) \to (\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ folytonos és $\|T\| = 1$.

1.34. Feladat*. Legyen $A : \mathscr{C}(K;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ olyan lineáris operátor, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$, $f \geq 0$ esetén $Af \geq 0$. Igazoljuk, hogy A folytonos!

1.35. Feladat. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nem-elfajult kompakt intervallum és jelölje $C(I;\mathbb{K})$ az I-n értelmezett $\mathbb{K}$-ba képező folytonos függvények λ_I-majdnem mindenütt való egyenlőség szerinti ekvivalenciaosztályainak halmazát, vagyis

$$C(I;\mathbb{K}) := \{[f] \mid f \in \mathscr{C}(I;\mathbb{K})\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ esetén $C(I;\mathbb{K}) \subseteq L^p(I)$ lineáris altér, mely $p \neq +\infty$ esetén mindenütt sűrű $L^p(I)$-ben.
b) Igazoljuk, hogy $f \in \mathscr{C}(I;\mathbb{K})$ esetén $|||f||| = \|[f]\|_\infty$ (ahol $\|\cdot\|_\infty$ az $L^\infty(I)$-beli norma).
c) Mutassuk meg, hogy $C(I;\mathbb{K})$ valódi zárt altere $L^\infty(I)$-nek.

1.36. Feladat. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nem-elfajult kompakt intervallum és legyen $1 \leq p \leq +\infty$.
a) Az előző feladat jelöléseinek megtartása mellett igazoljuk, hogy bármely $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ esetén az $[f]$ függvényosztály legfeljebb egy folytonos függvényt tartalmazhat, vagyis az $[f] \cap \mathscr{C}(I;\mathbb{K})$ halmaz legfeljebb egy elemű.
b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in I$ rögzített pont esetén a

$$\delta_x([f]) := f(x), \qquad f \in \mathscr{C}(I;\mathbb{K})$$

egyenlőséggel értelmezett $\delta_x : C(I;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ függvény jóldefiniált lineáris funkcionál.
c) Igazoljuk, hogy a $\delta_x : (C(I;\mathbb{K}), \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha $p = +\infty$.

2. Prehilbert és Hilbert-terek

2.1. Feladat. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér. Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|$ pontosan akkor tesz eleget a paralelogramma egyenlőségnek, ha minden $x, y \in E$ esetén

$$2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2,$$

vagy pedig ha minden $x, y \in E$ esetén

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

2.2. Feladat*. (Jordan–Neumann-tétel) Legyen E normált tér. Igazoljuk, hogy pontosan akkor létezik olyan skalárszorzat E fölött, amely által generált norma megegyezik E normájával, ha E normája eleget tesz a paralelogramma egyenlőségnek, azaz minden $x, y \in E$ esetén

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

2.3. Feladat. Legyen E prehilbert tér, és $x, y \in E$. Mutassuk meg, hogy x és y pontosan akkor merőleges egymásra, ha minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ teljesül.

2.4. Feladat. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T nemüres halmaz fölött, és jelölje $\mathscr{E}(T;\mathbb{K})$ a T-ből $\mathbb{K}$-ba képező $\mathscr{R}$-lépcsős függvények vektorterét. Tetszőleges $\mathscr{E}(T;\mathbb{K})$ fölötti $\mathfrak{s}$ félskalárszorzatra ekvivalensek:

i) Az $\mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$, $E \mapsto \mathbf{s}(\chi_E, \chi_E)$ halmazfüggvény additív;
ii) Tetszőleges $\varphi \in \mathscr{E}(T;\mathbb{K})$ függvény mellett $\mathbf{s}(\varphi, \varphi) = \mathbf{s}(|\varphi|, |\varphi|)$.

2.5. Feladat*. Igazoljuk, hogy egy nem véges dimenziós Hilbert tér (algebrai) dimenziója legalább $2^{\aleph_0}$.

2.6. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges E $\mathbb{K}$ fölötti vektortéren megadható prehilbert tér struktúra, azaz létezik $(\cdot\,|\,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ skaláris szorzat. (Azonban az előző feladat állítása szerint pl. az $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ véges tartójú függvények vektortere fölött nem adható meg olyan skaláris szorzat, amellyel az teljes, azaz Hilbert tér volna.)

2.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha E vektortér, $\mathbf{s}$ pedig félskalárszorzat E fölött, akkor az $N_{\mathbf{s}} = \{x \in E \,|\, \mathbf{s}(x,x) = 0\}$ lineáris altere E-nek, továbbá az

$$\mathbf{s}'(x + N_{\mathbf{s}}, y + N_{\mathbf{s}}) := \mathbf{s}(x, y)$$

leképezés skaláris szorzat az $E/N_{\mathbf{s}}$ faktortéren.

2.8. Feladat. Ha E prehilbert tér $\mathbb{K}$ fölött és $x, y \in E$, akkor az $|(x\,|\,y)| = \|x\|\|y\|$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $y = \lambda.x$ vagy $x = \lambda.y$.

2.9. Feladat*. Legyen E prehilbert tér, és legyenek $x, y, z \in E$ nem nulla vektorok. Mutassuk meg, hogy az

$$\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\| \tag{1}$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha létezik $\alpha \in [0,1]$, hogy $z = \alpha x + (1-\alpha)y$.

2.10. Feladat. Legyen E prehilbert tér. Ha $x, y \in E$ olyan vektorok, hogy $\|x\| = \|y\| = 1$ és $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$ teljesül valamely $0 < \alpha < 1$ számra, akkor szükségképpen $x = y$. Másszóval, az E-beli zárt egységgömb extremális pontjai pontosan az egy normájú vektorok.

2.11. Feladat. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér, és jelölje $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos lineáris operátorok halmazát. Igazoljuk, hogy tetszőleges $x \in \mathscr{H}$, $\|x\| = 1$ vektor esetén az alábbi

$(\cdot\,|\,\cdot)_x : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{K}$,

$$(S\,|\,T)_x = (Sx\,|\,Tx) - (Sx\,|\,x)(x\,|\,Tx)$$

leképezés félskalárszorzat.

2.12. Feladat. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-ban haladó sorozatra és $x \in \mathscr{H}$ vektorra ekvivalensek a következők:

i) $x_n \to x$ (a skaláris szorzat által meghatározott norma szerint);
ii) $x_n \to x$ gyengén és $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|$.

2.13. Feladat. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, illetve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-ban haladó sorozat, és $x, y \in \mathscr{H}$.

a) Mutassuk meg, hogy ha $x_n \to x$ gyengén, és $\|y_n - y\| \to 0$, akkor $(x_n\,|\,y_n) \to (x\,|\,y)$.
b) Igaz-e, hogy ha $x_n \to x$ gyengén és $y_n \to y$ gyengén, akkor $(x_n\,|\,y_n) \to (x\,|\,y)$?

2.14. Feladat*. Mutassuk meg, hogy az $\ell^2_{\mathbb{K}}$ Hilbert tér alábbi

$$K := \left\{ a \in \ell^2_{\mathbb{K}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \cdot |a(n)|^2 \le 1 \right\}$$

részhalmaza olyan korlátos, zárt, konvex halmaz, amelynek nem létezik legnagyobb normájú eleme.

2.15. Feladat*. Legyen K nemüres zárt, konvex részhalmaza a $\mathscr{H}$ Hilbert térnek, legyen továbbá $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor.

a) Igazoljuk, hogy minden $a \in K$ pont esetén az alábbi kijelentések ekvivalensek:
   i) $\|x - a\| = \operatorname{dist}_K(x)$;
   ii) Minden $y \in K$ esetén $\mathfrak{Re}(x - a\,|\,y - a) \le 0$.
b) Jelölje P_K azt a $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ függvényt, amely minden $\mathscr{H} \ni x$-hoz hozzárendelei azt az egyetlen $P_K(x) \in K$ vektort, amelyre $\|x - P_K(x)\| = \operatorname{dist}_K(x)$. Mutassuk meg, hogy minden $x, x' \in \mathscr{H}$ esetén

$$\|P_K(x) - P_K(x')\| \le \|x - x'\|.$$

Speciálisan, P_K Lipschitz-folytonos függvény.

2.16. Feladat. Legyen K zárt konvex halmaz a $\mathscr{H}$ Hilbert térben. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan K-ban haladó sorozat, amely gyengén konvergál az $x \in \mathscr{H}$ vektorhoz, akkor szükségképpen $x \in K$ is teljesül. (*Útmutatás:* Alkalmazzuk az előző feladat a) állítását.)

2.17. Feladat*. Mutassunk példát E prehilbert térre és annak M zárt lineáris alterére, hogy $M \ne M^{\perp\perp}$.

2.18. Feladat. Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbert terek, és legyen T zárt lineáris altere a $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ szorzattérnek. Mutassuk meg, hogy a

$$\operatorname{mul} T := \big\{ y \in \mathscr{K} \;\big|\; (0, y) \in T \big\}, \quad \ker T := \big\{ x \in \mathscr{H} \;\big|\; (x, 0) \in T \big\}$$

halmazok zárt lineáris alterei a $\mathscr{K}$, illetve $\mathscr{H}$ Hilbert tereknek.

2.19. Feladat. Igazoljuk, hogy egy E prehilbert tér pontosan akkor véges dimenziós, ha minden E fölötti lineáris funkcionál folytonos.

2.20. Feladat*. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér, legyen továbbá $H \subseteq \mathscr{H}$ véges dimenziós altér, K pedig olyan zárt altere $\mathscr{H}$-nak, amelyre $\dim H < \dim K$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $0 \ne x \in K$ vektor, melyre $\operatorname{dist}_H(x) = \|x\|$.

2.21. Feladat. Legyen μ véges mérték, ν pedig korlátos komplex mérték az $(X, \mathscr{A})$ mérhető tér fölött. Mutassuk meg, hogy ha $|\nu| \leq C\mu$ teljesül valamely $C \geq 0$ konstanssal, akkor létezik olyan f korlátos $(X, \mathscr{A})$-mérhető függvény, hogy minden $A \in \mathscr{A}$ mérhető halmazra

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

teljesül. (*Útmutatás*: Alkalmazzuk a Riesz reprezentációs tételt az $L^2(X, \mu)$ Hilbert térre és az a fölötti $f \mapsto \int f \, d\nu$ lineáris funkcionálra!)

2.22. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden nem nulla-dimenziós Hilbert-térben van teljes ortonormált rendszer!
(*Útmutatás:* Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér, és jelölje $\mathscr{M}$ a $\mathscr{H}$-beli ortonormált bázisok halmazát, ellátva a tartalmazás relációval, tehát $M, N \in \mathscr{M}$ esetén $M \leq N$ pontosan akkor, ha $M \subseteq N$. Világos, hogy $\mathscr{M}$ nem üres, és $(\mathscr{M}, \leq)$ részben rendezett halmaz. Megmutatjuk, hogy $(\mathscr{M}, \leq)$ kielégíti a Zorn-lemma feltételeit. Legyen ugyanis $(M_i)_{i \in \mathscr{I}}$ egy tetszőleges olyan $\mathscr{M}$-beli rendszer, hogy bármely $i, j \in \mathscr{I}$ esetén $M_i \leq M_j$ vagy $M_j \leq M_i$. Ekkor az $M := \bigcup_{i \in \mathscr{I}} M_i$ halmaz $\mathscr{M}$-beli felső korlátja az $(M_i)_{i \in \mathscr{I}}$ rendszernek, ugyanis bármely $x, y \in M$ vektorokhoz létezik olyan $i, j \in \mathscr{I}$, hogy $x \in M_i$ és $y \in M_j$, de akkor az $(M_i)_{i \in \mathscr{I}}$ rendszerre tett feltevés szerint $M_i \subseteq M_j$ vagy $M_j \subseteq M_i$, amiből nyilván következik, hogy $\|x\| = \|y\| = 1$, és $x \neq y$ esetén x és y merőlegesek, amiből következik, hogy M ortonormált rendszer, vagyis $M \in \mathscr{M}$. Az pedig nyilvánvaló, hogy bármely $i \in \mathscr{I}$ esetén $M_i \leq M$, vagyis az M halmaz $\mathscr{M}$-beli felső korlátja az $(M_i)_{i \in \mathscr{I}}$ rendszernek.

Ezzel megmutattuk, hogy az $(\mathscr{M}, \leq)$ rendezett halmaz kielégíti a Zorn-lemma feltételeit, emiatt létezik $M \in \mathscr{M}$ maximális elem. Megmutatjuk, hogy M teljes ortonormált rendszer $\mathscr{H}$-ban. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy $M^\perp$ tartalmaz nem-nulla vektort, akkor nyilván létezik olyan $e \in M^\perp$ vektor is, amelyre $\|e\| = 1$, de akkor $M' := M \cup \{e\}$ szintén M-beli ortonormált rendszer volna, de akkor M maximalitása miatt $M' \leq M$ is teljesülne, ami $e \notin M$ miatt lehetetlen. Ezzel igazoltuk, hogy $M^\perp = \{0\}$, vagyis M teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben.)

2.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne teljes ortonormált sorozat!

2.24. Feladat (Radon–Nikodym tétel)**.** Legyenek μ és ν véges mértékek az $(X, \mathscr{A})$ mérhető téren, és tegyük fel, hogy ν abszolút folytonos a μ mértékre nézve, azaz tetszőleges $E \in \mathscr{A}$ halmazra $\mu(E) = 0$ esetén $\nu(E) = 0$. Ekkor létezik egyetlen $g \in L^1(\mu)$, hogy minden $E \in \mathscr{A}$ mellett

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu.$$

(*Útmutatás:* Mutassuk meg először, hogy az

$$u(f) := \int_X f \, d\mu, \qquad f \in L^2(\mu + \nu)$$

egyenlőséggel értelmezett $u : L^2(\mu+\nu) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos lineáris funkcionál. Jelölje $h \in L^2(\mu + \nu)$ az u Riesz-reprezentáns vektorát, akkor h $(\mu + \nu)$-majdnem mindenütt pozitív és a Beppo-Levi tétel felhasználásával igazolható, hogy $\frac{1}{h} \in L^1(\mu)$ és $g := \frac{1}{h} - 1$ rendelkezik a Radon–Nikodym tulajdonsággal.)