2017.02
(SLP)

Motiváció

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bonyolult fv. közelítése egyszerűekkel

2) $\dot{x}(t) = f(x(t))$ közdiff

$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds = (T(x))(t)$ integrálegyenlet, $x_{n+1} = T(x_n)$,

$x_n \to$ megoldáshoz egzisztenciabizonyítás fsorozattal

3) $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $x = ?$

λ_i, u_i sértékek, svektor $\to$ $x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ alakban keresni,

ha (u_i) bázis. $b = \sum b_i u_i$ $\Rightarrow$ $\sum c_i \lambda_i u_i = \sum b_i u_i$

$\to$ $c_i = \frac{b_i}{\lambda_i}$

Ez hogy általánosítható?

$\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x)$; $u(0,x) =$ adott, esetleg peremfeltételek

Keressük u-t ilyen alakban: $u(t,x) = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i(x)$

(ha van némi szerencsénk, látjuk, hogy ez nem reménytelen)

$\to$ $\sum c_i \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i(x) = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i''(x)$

Szép álom: $\lambda_i v_i(x) = v_i''(x)$, azaz v_i a kétszeres deriválás sajátfvénye.

$u(0,x) = \sum c_i v_i(x)$

Fourier-sor: elég alapfüggvényeket előállítani

Ez lehetséges-e? Ill. mikor végtelen $\sum$ kell majd.

További motiváció a félév során.

Témák

I. Fourier-sor absztraktban
Klasszikus tételek — Simon L. Péter

II. Izoperimetrikus probléma
Diszkrét Fourier-sorok (Darboux, Gauss) — Besenyei Ádám
Hőveretés (ma parciálisan nem lesz)

III. Stone–Weierstrass-témakör
Ortogonális polinomok — Pfeil Tamás

Absztrakt megközelítés

① Algebrai szint

② Funkcionál szintje (már van topológia)

③ Analitis konkrét térben

A Fourier-sor absztrakt megközelítése

① Legyen H VT, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat, ált. valós, de nem mindig.

<u>Def.</u> Egy $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ vektorrendszer ortogonális, ha $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.

Egy ortogon. rendszer ortonormált, ha $\langle e_i, e_i \rangle = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

<u>Def.</u> Egy $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ vektorrendszer teljes, ha $\langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x = 0$.

<u>Def.</u> Legyen $\{e_i\}$ ortonormált rendszer, Egy $x \in H$ Fourier-együtthatói $x_i = \langle x_i, e_i \rangle$ $(i \in \mathbb{N})$.

Az x Fourier-sora $\sum x_i e_i$ (formális sor).

<u>Megj.</u> Ez az $\mathbb{R}^n$-beli $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB általánosítása.

<u>Kérdés.</u> az Fourier-sor konvergens-e; és ha igen, mi az összege? Remény: $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$.

Norma H-ban a szokásos módon: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Normabeli konvergencia: $\lim_{n \to \infty} \|s_n - x\| = 0$ lenne jó.

<u>Áll.</u>$_1$ $\forall x \in H \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\langle x - s_n, e_j \rangle = 0$, ha $j \leq n$.

B: $\langle x - s_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle s_n, e_j \rangle = x_j - \sum_{i=0}^{n} \langle e_i, e_j \rangle x_i = x_j - x_j = 0$. □

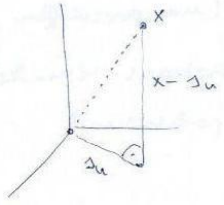
<u>Áll.</u>$_2$ $\forall x \in H \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\langle x - s_n, s_n \rangle = 0$.

B: $\langle x - s_n, s_n \rangle = \langle x, s_n \rangle - \langle s_n, s_n \rangle = \dots$

Vagy: $\langle x - s_n, s_n \rangle = \langle x - s_n, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underbrace{\langle x - s_n, e_j \rangle}_{0} = 0$

(Itt most valóban kiszámítottuk.) □

<u>Áll.</u>$_3$ $\forall x \in H \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2$



B: $\|x\| = \langle x - s_n + s_n, x - s_n + s_n \rangle =$

$= \|x - s_n\|^2 + 2 \cdot \underbrace{\langle x - s_n, s_n \rangle}_{0} + \|s_n\|^2$ □

Áll. $\forall n \geqq m$: $\langle s_n, s_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$

B: $\langle s_n, s_m \rangle = \langle s_n, \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \underbrace{\langle s_n, e_i \rangle}_{x_i}$ □

Tétel. (Bessel-egyenlőtlenség) $\forall x \in H \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq \|x\|^2$

B: $\|s_n\|^2 \leqq \|x\|^2$ a fenntivel korábbi állítás miatt.

Az előző állítás szerint $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq \|x\|^2$. □

Ennek erős következménye lesznek.

② Legyen H Hilbert-tér.

Legyen $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $x_i = \langle x, e_i \rangle$

Áll. $\forall n \geqq m$ $\|s_n - s_m\| = \sigma_n - \sigma_m$

B: $\|s_n - s_m\|^2 = \langle s_n - s_m, s_n - s_m \rangle = \langle s_n, s_n \rangle - 2 \cdot \langle s_n, s_m \rangle + \langle s_m, s_m \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 = \sigma_n - \sigma_m$ □

Tétel. Legyen H Hilbert-tér, $\{e_i\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor $\forall x \in H$ elemet előállít a Fourier-sora: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, azaz $\lim_{n \to \infty} \|x - s_n\| = 0$, ahol $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

B: Legyen σ_n mint eddig. Ez növő sorozat.

Bessel-egyenlőtlenség $\Rightarrow$ $\sigma_n \leqq \|x\|^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_{n \to \infty} \sigma_n \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ σ_n Cauchy $\Rightarrow$ s_n is Cauchy az állítás miatt (H-ban).

$\overset{\text{teljesség}}{\Rightarrow}$ s_n konvergens $\Rightarrow$ $\sum x_i e_i$ konvergens.

Legyen $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = z$. $\Rightarrow$ $\langle z, e_j \rangle = x_j$, mert a skalárszorzat folytonos.

$\langle x - z, e_j \rangle = x_j - x_j = 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $x - z = 0 \Leftrightarrow x = z$,

mert $\{e_j\}$ teljes rendszer. □

Tétel. (Parseval-formula) Legyen H Hilbert, $\{e_i\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor $\forall x \in H$: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2$.

B: 3. állítás és 4. állítás

$$\left.\begin{array}{l} \text{előző tétel: } \lim_{n \to \infty} \|x - s_n\| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underbrace{\|s_n\|^2}_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|^2$$

□

Megj. Ha $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \text{ konv.}}_{\sigma_n \text{ konv.}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \text{ konvergens}}_{s_n \text{ konv.}}$, ez a fenti átfogalmazása.

Az eddigieket megoldáljuk ortogonális rendszerre is (normálás nélkül); technikai kitérő.

Legyen H VT, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat, $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ ortogonális rendszer: $\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$, és tfh. $f_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Legyen $\langle f_i, f_i \rangle = \alpha_i^2$, $e_i = \frac{f_i}{\alpha_i}$ normált.

$\Rightarrow \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ONR

× Fourier-együtt. $\{e_i\}$ szerint: $x_i = \langle x, e_i \rangle = \frac{1}{\alpha_i} \langle x, f_i \rangle$

× Fourier-sora: $\sum x_i e_i = \sum \frac{1}{\alpha_i} \langle x, f_i \rangle \cdot \frac{1}{\alpha_i} f_i = \sum \frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$

Def. H, $\langle \cdot, \rangle$, $\{f_i\}$ mint eddig. Egy $x \in H$ Fourier-együtt. az $\{f_i\}$ rendszer szerint $\frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$, és x Fourier-sora $\sum \frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$.

Tétel. (Bessel-egyenlőtlenség ortogonális rendszerre)

H, $\{f_i\}$ mint eddig. Ekkor $\forall x \in H \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, f_i \rangle^2}{\langle f_i, f_i \rangle} \leq \|x\|^2$

B: Ortonormált Bessel: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \|x\|^2$

$x_i = \frac{1}{\alpha_i} \langle x, f_i \rangle$ helyettesítéssel az állítás adódik. □

Tétel. H Hilbert-tér, $\{f_i\} \subset H$ TOR. Ekkor $\forall x \in H$ Fourier-sora előállítja x-et. Azaz $\lim_{n \to \infty} \|x - s_n\| = 0$, ahol $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$.

B: A TONR-re alkalmazzuk a tételt, és a Fourier-sor $\{e_i\}$-re ugyanaz, mint $\{f_i\}$-re. □

Tétel. (Parseval-formula) Legyen H Hilbert, $\{f_i\}$ TOR. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, f_i \rangle^2}{\langle f_i, f_i \rangle} = \|x\|^2.$$

B: Ugyanúgy, mint az előző tétet. □

Legyen H függvénytér:

Legyen X halmaz, és H az $X \to \mathbb{R}$ vagy $X \to \mathbb{C}$ típusú halmaz:

Ekkor H vektortér.

Skalárszorzat: $\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot g \; d?$ $\longrightarrow$ kell X-en μ mértéket,

így $\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot g \, d\mu$, ha f, g μ szerint integrálhatók.

Jó hír: $L_2(X, \mu) =: H$ teljes tér. (Riesz – Fischer-tétel)

$\downarrow \int_X |f|^2 \, d\mu < \infty$

Legyen $(\varphi_n) \subset L_2(X, \mu)$ TONR, azaz $\int_X \varphi_n \varphi_m \, d\mu = 0 \;\; \forall n \neq m$, 2017.02. (SLP)

$\int_X \varphi_n^2 \, d\mu = 1$ és ha $\int_X f \cdot \varphi_n \, d\mu = 0 \;\; \forall n$, akkor $f = 0$. „ünnepélyes pillanat: n betű lesz az index"

$f \in L_2(X, \mu)$ Fourier-sora $\sum f_n \cdot \varphi_n$, ahol $f_n = \int_X f \cdot \varphi_n \, d\mu$ előző.

Legyen $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i$.

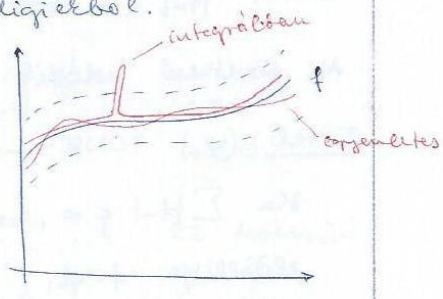
Tétel. $\forall f \in L_2(X, \mu)$: $\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\| = 0$, azaz $\int_X |f - s_n|^2 \, d\mu \to 0$. □

Ez eddig csupán funkcional.

Kérdés: $\sum f_n \cdot \varphi_n$ pontonként, ill. egyenletesen konvergens-e?

Az integrálban való közelséget kapjuk csak az eddigiekből.

Pontonkénti konvergencia $L_2(X, \mu)$-ben



Lemma. (Riesz) Ha egy függvénysorozat L_2-konvergens, akkor van majdnem mindenütt (pontonként) konvergens részsorozata.

Ezt használjuk az RFT bizonyításához.

Ha tudjuk, hogy $\sum f_n \varphi_n$ pontonként konvergens (m.m.) $\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \varphi_n(x)$ m.m. x-re, ez a lemmából következik.

Röviden: ha konvergens, akkor elő is állítja f-et.

Tétel. (Lebesgue, Beppo Levi) Legyen $(g_n) \subset L_2(X, \mu)$ olyan függvénysorozat, amire $\sum \int_X |g_n| \, d\mu$ konvergens. Ekkor $\sum g_n$ m.m. pontonként konvergens és $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n \cdot d\mu$ □

Most $g(x) = f_n \varphi_n(x)$ lesz: $\int_X |g_n| = |f_n| \int_X |\varphi_n| \, d\mu$

Tudjuk: $\int_X |\varphi_n|^2 \, d\mu = 1$. Ha $\mu(X)$ véges, akkor $\int_X |\varphi_n| \leq K \ \forall n$,

és ez nem nagy megkötés, mert X úgyis intervallum lesz.

(Szétbontás 1-nél nagyobb és kisebb részre.)

Kell: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \cdot K$ konvergens $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konvergens.

Tehát a következőt kapjuk:

<u>Tétel.</u> $\mu(X) < \infty$, (φ_n) TONR $L_2(X, \mu)$-ben.

Ha $f \in L_2(X, \mu)$-re $\sum |f_n| < \infty$, akkor $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$ m.m. x-re. □

<u>Egyenletes konvergencia $L_2(X, \mu)$-ben</u>

<u>Tétel.</u> (Weierstrass-konvergenciakritérium) Legyen $(g_n) \subset \overbrace{L_2(X, \mu)}^{\text{ez nem fontos}}$ olyan, hogy $\exists (a_n) \subset \mathbb{R}$, hogy $|g_n(x)| \leq a_n \ \forall x \in X$ és $\sum a_n$ konvergens.

Akkor $\sum g_n$ egyenletesen konvergens X-en. □

Alkalmazzuk: $g(x) := f_n \varphi_n(x)$

$$|g_n(x)| \leq |f_n| \cdot |\varphi_n(x)| \leq |f_n| \cdot K, \quad \text{ha } |\varphi_n(x)| \leq K \ \forall n \ \forall x$$

Ennek $|f_n| \cdot K =: a_n$.

A következő adódik:

<u>Tétel.</u> (φ_n) TONR $L_2(X, \mu)$-ben. Tfh. $\exists K \in \mathbb{R}$: $|\varphi_n(x)| \leq K \ \forall n \ \forall x \in X$.

Ha $\sum |f_n| < \infty$, akkor f Fourier-sora egyenletesen konvergens és előállítja f-et, ahol $f_n = \int_X f \cdot \varphi_n \, d\mu$. □

Még kontrétabb viszonyt vesszük: X intervallum, μ a Lebesgue-mérték, esetleg súlyfüggvénnyel: $\int_a^b f(x) g(x) w(x) \, dx = \langle f, g \rangle$.
(Később, P. T.-sal.)

(φ_n) vagy adott, vagy magunk hozzuk létre $\rightarrow$ ortogonális polinomok. (később)
$\downarrow$
trigonometrikus rendszer

Fourier-sor trigonometrikus rendszer szerint

Ez a klasszikus, amit a mérnökök tanulnak.

Legyen I egy 2π hosszú intervallum, pl. $[0, 2\pi]$ vagy $[-\pi, +\pi]$.
(mol ez, mol az)

Legyen $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)\, g(x)\, dx$. $\longrightarrow$ nem lesz teljes tér!

Függvénysorozat: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \longrightarrow$ trig. rsz.

<u>Áll.</u> Ez ortogonális rendszer.

B: Kell:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx)\, dx = 0, \quad (1)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx)\, dx = 0, \quad (2)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = 0. \quad (3)$$

Ehhez összeg-szorzat-képletek kellenek: $2 \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin((k+n)x)}_{\substack{0,\ \text{mert} \\ \text{periodikus}}} + \underbrace{\sin((k-n)x)}_{\substack{0,\ \text{mert} \\ \text{periodikus}}}\, dx \Rightarrow (1)$$

(Vagy a prim. fv. is felírható.) (2), (3) hasonlóan. □

<u>Áll.</u> $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi \quad (n \neq 0)$ és $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \begin{cases} \pi & n \neq 0 \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$. □

<u>Áll.</u> (BN) A trigonometrikus rendszer teljes $L_2(I)$-ben, ahol I 2π hosszúságú intervallum. Azaz ha $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = 0$ és $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = 0$ $\forall k \longrightarrow f = 0$ a $L_2(I)$.

Ennek vannak elemi, de mérnökös bizonyítása. Később, a Stone-Weierstrassból fogjuk bizonyítani (P.T.).

Tehát a trigonometrikus rendszer TOR.

<u>Def.</u> Legyen $f \in L_2(I)$, I hossza 2π. Ennek a trigonometrikus rsz. szerinti Fourier-együtthatói:
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \cos(nx)\, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \sin(nx)\, dx.$$

f Fourier-sora: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$ (bár itt még nem tudjuk, hogy konvergens)

Mj. Van, ahol az $1/2$-et belevesszük az együtthatóba.

<u>Tétel.</u> Legyen $f \in L_2(I)$, $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$.

Ekkor $\lim_{n\to\infty} \int_I |f(x) - S_n(x)|^2 \, dx = 0$ $\square$

Ez az általános tételből jön.

<u>Tétel</u> (klasszikus Parseval) $\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \int_X |f(x)|^2 \, dx$ $\square$

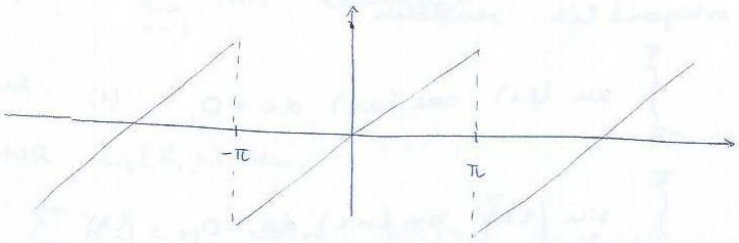
<u>Példák.</u>

1.) $f(x) = x$, $x = (-\pi, \pi)$

$\downarrow$

periodikussá tesszük

$\hookrightarrow$ fűrészfog-fv. (mérőszám)



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx) \, dx = 0 \qquad \text{(pt. fv. szimm. intervallumon)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'} dx \overset{\text{parc.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx}_{0,\ \text{periodicitás}} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(-\pi \cdot \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + (-\pi) \cdot \cos n\pi \right) = 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$\neq$ Fourier-sora: $2 \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots\right)$

A pontbeli konvergencia szemléletes, kivéve persze a végpontokat.

Az egyenletes konvergenciára esély sincs: a π körül a periodicitás miatt nem stimmelhet.

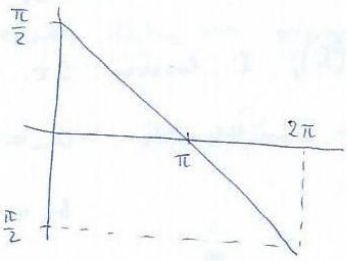
Parseval: $4 \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 2 \cdot \frac{\pi^3}{3}$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ emögött áll a Hilbert-tér és az RFT, meg minden, amit eddig csináltunk.

2.) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

$\rightarrow a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ (HF)

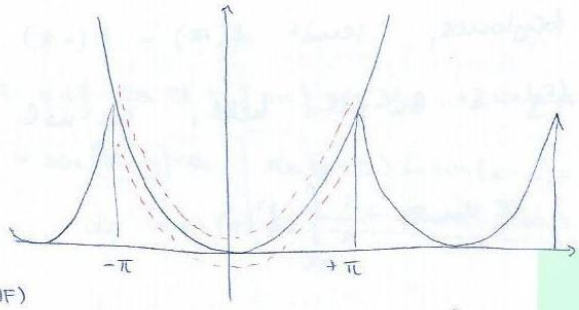
Fourier-sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$



De ennél nincs meg a pontonkénti konvergencia (még):

$$\sum |f_n| = \sum \frac{1}{n} = \infty.$$

3.) $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = 4\cdot\frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \neq 0)$$

(HF)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx = 0 \quad \text{(páratlan)}$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$\longrightarrow$ Fourier-sor: $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

Most $\sum |f_n| \approx \sum \frac{1}{n^2} < \infty$. Az általános tételt szerint a F-sor egyenletesen is konvergens (azaz pontonként is).

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Parseval: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. „És ez van a Wikipédián is, úgyhogy biztos igaz."

Trigonometrikus Fourier-sor egyenletes konvergenciája

2017.03 (SLP)

Az általános tételt használjuk.

Emlék: $|\varphi_n| \le K \quad \forall n$ és $\sum |f_n| < \infty \longrightarrow \sum \varphi_n f_n$ egy. konvergens.

Itt $|\varphi_n| \le 1$, mert trigo. fvények.

Csak az kell, hogy $\sum |a_n|$ és $\sum |b_n|$ konvergens.

Parciális integrálás: ehhez kell f simasága

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{\cos(nx)}_{\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'}\,dx = \left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\,dx =$$

Ez szép, ha $\exists \lim_{-\pi^+} f = f(-\pi+0)$ és $\exists \lim_{\pi^-} f = f(\pi - 0)$, és $f' \in L_1$.

Ezért csak annyit teszünk fel, hogy pl. a fűrészfogfv. is működjön.

Áll. Ha f ilyen, akkor a Fourier-elemi $\frac{1}{n}$ nagyságrendűek: $|a_n| \le \frac{c}{n}$, $|b_n| \le \frac{c}{n}$. □

Ez az egyenletes konvergenciát még nem adja ki: kíne még egy n a nevezőbe $\longrightarrow$ még egy parc. integrálás.

Ehhez fel kell tenni, hogy f periodikus és a végpontokban folytonos, tehát $f(\pi) = f(-\pi)$ $\Rightarrow$ az első tag kiesik.
(Ez a b_n-nél kell, a_n-nél $\sin nx$ miatt úgyis 0.)

$$\pi a_n = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{b_n'}{n}, \text{ ahol}$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

a derivált F-ehi

Ugyanígy $b_n = +\frac{a_n'}{n}$

Most igazoljuk $\sum |a_n|$ és $\sum |b_n|$ konvergenciáját.

CBS: $\sum_{n=1}^{N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot |b_n'| \leq \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum |b_n'|^2}$

Bessel: $f \in L_2 \Rightarrow \sum f_n^2$ konv. Emiatt $f' \in L_2 \Rightarrow \sum |f_n|^2$ konv.

Tehát bizonyítottuk a következőt:

<u>Tétel</u>. Legyen f 2π-periodikus és differi $(-\pi, \pi)$-n, folytonos $[-\pi, \pi]$-n és $f' \in L_2(-\pi, \pi)$

$\Rightarrow f$ F-sora e. konvergens $[-\pi, \pi]$-n (és előáll f-et). □

itt ez a legnagyobb kiváltás

<u>Mj</u>. Ha f'' is létezik, akkor CBS se kell. (jegyzetben)

<u>Trigonometrikus Fourier-sor pontonkénti konvergenciája</u>

A fürésfogfrenyjét kutatjuk.

<u>Riemann–Lebesgue-lemma</u>. Ha $f \in L_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

B: Bessel-egyenlőtlenség: $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens

$\Rightarrow \lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$. □

<u>Mj</u>. Ez $f \in L_1$-re is igaz, de itt Bessel már nem használható, hanem f-et approximálni kell L_2-beliekkel.

Pontonkénti konv.: $S_n(x) \to f(x)$, ahol $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Szép leírás: $S_n(x)$-re zárt alak.

<u>Def.</u> $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ Dirichlet-féle magfüggvény

Áll. $D_n(t) = \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\cdot\sin\frac{t}{2}}$, ha $t \neq 0$. $D_n(0) = \frac{1}{2} + n$.

B: $2\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\cos t + 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2}\cos 3t + \ldots + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt$

$= \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \ldots + \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}t\right)$ $\quad \boxed{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta}$

$= \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)$ □

Lemma. Legyen f 2π-periodikus, L_1-beli. Ekkor $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt$.

B: $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\underbrace{(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)}_{\cos(k\cdot(t-x))}\,dt =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right]dt =$ $\quad s := t-x$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\cdot D_n(s)\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)\,D_n(s)\,ds$, mert f és D_n is 2π-periodikusak. □

Vegyük észre hogy $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$ (D_n definícióból)

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,f(x)\,dt$.

$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t) - f(x)\right)\cdot\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$

ezzel baj van 0-ban

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{f(x+t)-f(x)}{t}}_{\text{ezt kell feltétel még}}\cdot\underbrace{\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}}_{\text{folytonos}}\cdot\underbrace{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}_{\text{folytonos}}\,dt =$

Tehát f-ről valamit még fel kell tenni: itt még sok minden lehet.

Pl. elég, ha f diffható. Működik lok. Lipschitz is (az n.m. diffható): $|f(x+t) - f(x)| \le L\cdot t$, ha $|t| < \delta$.

Ha f lok. Lipschitz és L_2-beli $\Rightarrow F(t) := \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ is L_2-beli

$S_n(x) - f(x)$-nek kéne 0-hoz tartani a pk. konvergenciához.

Legyen $g(t) = F(t)\cdot\frac{t/2}{\sin t/2}$, ez is L_2-beli.

Lemma. Ha $g \in L_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot t\right)\, dt = 0$

B: $g(t)\cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot t\right) = \underbrace{g(t)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\sin(nt)}_{} + g(t)\cdot\cos(nt)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

ez $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$ b_n-jét adja:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\, dt = g(t)\cdot\cos\frac{t}{2} \text{ F-ének } (b),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\, dt = g(t)\cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\frac{t}{2} \text{ F-ének } (a)$$

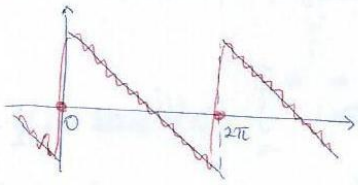
RL-lemma: $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, ha a fv. L_2-beli

$\Rightarrow$ a szit integrál összege is $\to 0$, ha $n\to\infty$. □

Igazoltuk tehát:

Tétel. (trg. F-s pontonk.) Legyen f 2π-periodikus L_2-beli. Ha az f x-ben lok. Lipschitz, akkor x-ben a Fourier-sor konvergens és $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$.

Példa. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x\in[0, 2\pi]$



Ez $\forall x\in(0,2\pi)$-re lok. lip., sőt diffhő. $\Rightarrow$ pontonkint konvergens:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad \forall x\in(0,2\pi)$$

A Fourier-sor $2k\pi$-re 0-t ad.

Bármely mikebb iv.-n a konvergencia egyenletes. (Abel-kritérium)

Példa. Fejér Lipót, 1910: olyan folytonos fv, aminek F-sora egy pontban divergens. $\Rightarrow$ a folytonosság nem elég.

Ez erősíthető: kontinuum sok, de nullmértékű pontban folyt. fv. F-sora divergens.

Sejtés. (Luzin, 1915) Folyt. fv. F-sora Lebesgue-m.m. konvergens.

$\to$ 1966 Carleson bizonyította erősebbre: L_2-beliekre.

Később Hunt, 1969: L_p-re is. $(p \geq \frac{1}{2})$

Kolmogorov: példa L_1-belire, ami mindenütt divergens.

Fourier-sor klasszikus megközelítése

2017.0
(SLP)

A mértékelméletet akarjuk kiterjeszteni, mintha mérőszámok magyaráznák.

Kell: Vektortér, skalárszorzat $\longrightarrow L^2(I)$ tér, teljesség az RFT-ből, ezt szükséglünk meg.

A függvénytér megmarad: $I \to \mathbb{R}$ ill. $I \to \mathbb{C}$ folytonos VT

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \quad \text{Riemann-integrál.} \longrightarrow \text{pl. lehet } C(I)$$

De $C(I)$ az L^2-normával nem teljes.

Látható: $C(I)$ túl erős feltétel: a mérőszám mesztelen a fűrészfogfüggvényt, amiben ez nem jó.

Kompromisszum: $PC(2\pi)$

<u>Def.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodikus, egy periódusban legfeljebb véges sok szakadása van, és a szakadási helyeken van bal- és jobbliminesz.
$PC(2\pi)$ az ilyen f-ek tere.

$H = PC(2\pi)$-ben lehet integrálni: $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$ Riemann-int.

Az algebrai megközelítés itt is működik, kijön a Bessel-egyenlőtlenség.

Nem kapjuk meg a normabeli konvergenciát és a Parseval-azonosságot, mert ehhez kell H teljessége.

Viszont a pontonkénti és az egyenletes konvergencia ugyanúgy megkapható

Komplex Fourier-sor trigonometrikus esetben

f 2π-periodikus és $\mathbb{C}$-be képez.

Fourier-sor: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $\quad a_n, b_n \in \mathbb{C}$

$\cos x = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{ixn} + e^{-ixn}) + b_n \cdot \frac{1}{2i} (e^{ixn} - e^{-ixn}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{c_n} \cdot e^{inx} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{c_{-n}} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+inx}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \end{cases}$$

c_n integrálos képlete:

$n>0$-ra $\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx - i f(x)\sin nx \, dx =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\, dx \qquad$ $n<0$-ra is kijön, és $n=0$-ra is.

<u>Def.</u> $f: I \to \mathbb{C}$ L^1-beli (vagy legalább olyan, hogy az integrálok léteznek).
Az $\{e^{inx} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ komplex trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sor $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot e^{inx}$, ahol $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_I f(x)\cdot e^{-inx}\, dx =: \hat{f}(n)$

Igazolható: a komplex trigonometrikus rendszer teljes és ortogonális.

$\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{inx}\right)^2 dx = 2\pi \quad \forall n \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{inx} \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ ortonormált rsz.

Az általános tételek alkalmazhatók.

Pl. Parseval: $2\pi\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \int_I |f|^2$

Konvergencia: $S_{n,m}(x) = \sum_{k=-m}^{n} c_k\cdot e^{ikx}$, $\quad S_n = S_{n,n}$

Az általános konvergenciatételből kapjuk:

<u>Tétel.</u> $f: I\to\mathbb{C}$ L^2-beli. Ennek tx. trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sora L^2-ben konvergens, azaz $\forall\varepsilon>0\ \exists N,\ \forall n,m>N$:
$\int_I |f - S_{n,m}|^2 < \varepsilon$.

„Úgy érzem, hogy nagyon kevés a levegő, úgynevezett nagyon sok viccet kéne mondanom, hogy ébren tartsam a hallgatóságot."

Nézzük a pontbeli konvergenciát:

<u>Tétel.</u> Legyen $f: I\to\mathbb{C}$ L^1-beli. Ha $x\in I$-ben f lokálisan Lipschitz, akkor ott a F-sor konvergens.

B: Igazoljuk, hogy $S_{n,m}(x)\to f(x)$, midőn $n,m\to\infty$.

Ftk. $x=0$ és $f(x)=0$. (elhalás, kivonás)

f 0-ban lok. lip. $\Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix}-1}$ L^1-beli $= \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{e^{ix}-1}$

Ötlet: $g(x)\cdot(e^{ix}-1) = f(x)$.

$\Rightarrow \hat{f}(n) = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n)$ definícióból.

$S_{n,m}(0) = \sum_{k=-m}^{n}\hat{f}(k) = \sum_{k=-m}^{n}\left(\hat{g}(k-1)-\hat{g}(k)\right) \underset{\text{teleszkóp}}{=} \hat{g}(-m-1) - \hat{g}(n)$

$g \in L^1(I) \Rightarrow \hat{g}(n) \to 0$. és $\hat{g}(-m-1) \to 0$, ha $n, m \to \infty$ a Riemann Lebesgue-lemma miatt (ami a Parseval szöveghelyére)

$\Rightarrow S_{n,m}(0) \to 0 = f(0)$.

Ezzel megspórolta a Dirichlet-maggal való szorzást és az integrálbecslést. □

Van egyszerűbb konv. is, de azt nem nézzük.

Fejér tétele

Motiváció: van olyan folyt. fv., aminek trigonometrikus F-sora nem minden pontban konvergens.

Fejér-féle ellenpélda:

De mégis szeretnénk valahogy összegezni.

Ha $S_n(x)$ nem konvergens $\Rightarrow$ nézzük helyette $\Gamma_n = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \ldots + S_n)$

Cesaro-féle összegzés

A cél ui. egy folyt. fv. közelítése trigonometrikussal; az nem annyira baj, ha ugyanaz átlagát kell venni.

Cél: $\Gamma_n(x) \to f(x)$ $\forall$ folyt. fv.-re $(n \to \infty)$

Láttuk: $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$, $D_n(t) = \ldots = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$

Ezzel $\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot K_n(t)\, dt$, ahol $K_n = \frac{1}{n}\left(D_0 + \ldots + D_{n-1}\right)$ Fejér-féle magfv.

<u>Lemma</u>. 1) $K_n(t) = \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\sin^2\left(n\cdot\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$

2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1$

3) $\delta \in (0,\pi) \Rightarrow \forall |t| \in (\delta, \pi)$-re $K_n(t) \leq \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\pi^2}{\delta^2}$

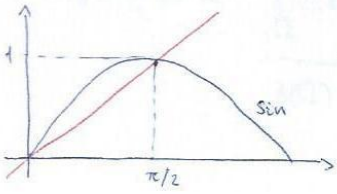
B: 1) $2n\cdot\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cdot K_n(t) = \cancel{2n}\cdot\sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\left(D_0 + \ldots + D_{n-1}(t)\right) =$

$= \sin\frac{t}{2}\cdot\left(\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{2n-1}{2}t\right) = \ldots =$ szorzat-összegképlet felhasználásával

$=$

2) Tudjuk, hogy $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D_2(t) = 1$. $\Rightarrow K_n$-re ✓

3)



$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$|t| > \delta \Rightarrow \sin\frac{t}{2} \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2} > \frac{\delta}{\pi}$

$t > 0$

1) -ből ezzel a becsléstel $K_n(t) \leq \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{\frac{\delta^2}{\pi^2}}$

$t<0$-ra ugyg. ✓

□

<u>Fejér tétele.</u> f folytonos 2π-periodikus. Ekkor Γ_n egyenletesen tart f-hez $[-\pi,\pi]$-n: $\Gamma_n \rightrightarrows f$.

B: Legyen $\varepsilon>0$. Megadok olyan N-et, hogy $n>N$-re

$|\Gamma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$.

$$\Gamma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(f(x+t) - f(x))\, K_n(t)}_{\text{ez adja } f(x)\text{-et}}\, dt$$

$$|\Gamma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\cdot K_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)$$

f egyenletesen folytonos $\underset{\text{(Heine)}}{\Rightarrow}$ $\exists \delta>0$: $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $x, x+t \in [-\pi,\pi]$ és $|t|<\delta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt \leq \frac{\pi-\delta}{\pi}\|f\|_\infty \cdot 2\cdot\frac{1}{2n}\frac{\pi^2}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{4},$$ ha

n elég nagy.

Ugyg $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} < \frac{\varepsilon}{4}$.

$\Rightarrow |\Gamma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

□

<u>Fejér-ellenpélda.</u> $X = C(2\pi)$ folyt. 2π-period., $Y = \mathbb{R}$,

$\underbrace{A_n f}_{\text{operátorsorozat}} := S_n^f(0)$ a F-sor n-edik részletösszege (f-hez)

$\Rightarrow A_n$ folyt. lin. funk.

<u>Áll.</u> $\exists f \in C(2\pi)$: $\|f\| = 1$, de $|A_n f| \to \infty$, ha $n \to \infty$.

B: $f(x) := \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \Rightarrow A_n f = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

itt mi az n?

Banach–Steinhaus-tétel $\Rightarrow$ ha $\exists\, \forall f \in C(2\pi)$-re $S_n^f(0)$ konvergens lenne, akkor $A_n f$ korlátos lenne $\Rightarrow \|A_n\|$ korlátos lenne, de ez nem igaz. ↯ □

Fejérnek van konkrét ellenpéldája is.

Izoperimetrikus probléma

2017. 03. 16. (BA)

Történet:
- Dido problémája → adott terület mellett max. területű síridom
- Zenodorusz: adott oldalszámú és területű sokszögek közül a szabályos a legnagyobb területű
  Ez térben nem igaz, csak 4, 6, 12 lapszám mellett (8, 20-ra nem!)
- Jakob Steiner: 1838-ban 5 bizonyítás. Csak azt látta be, hogy ha van max., akkor az kör.
- Weierstrass: 1879, variációszámítás → szükséges feltétel elégséges feltétel nélküli teljesítésére
- Adolf Hurwitz 1901-02: Fourier-sorokkal

<u>Tétel.</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe, folyt. diff.ható (valójából a rektifikálhatóság elég). Legyen γ ívhossza L, a γ által határolt tartomány területe A.

Ekkor $L^2 - 4\pi A \geq 0$. Egyenlőség $\Leftrightarrow$ γ körvonal.

<u>Megj.</u> $L^2 - 4\pi A$ az ún. izoperimetrikus deficit, ill. $\frac{4\pi A}{L^2}$ az izoperimetrikus hányados (Pólya), $IQ \leq 1$

<u>Emlék.</u>
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folyt.diff. görbe ívhossza $L = s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt =$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt, \quad \text{ha } \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Ha γ egyszerű zárt görbe pozitív irányítással, folyt. diff.ható. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a γ által határolt korlátos tartomány területe

$$A = \int_a^b x(t) \cdot y'(t)\, dt \quad \text{a Green-tételből.}$$

Green-tétel: $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega \underbrace{\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2}_{\operatorname{div} f} = \int_{\partial\Omega} f_1\, dx - f_2\, dy$

Ezt $f(x,y) = (x,0)$-ra $\underbrace{\int_\Omega 1}_{\lambda(\Omega)} = \int_{\partial\Omega = \gamma} x\, dy$ $\Rightarrow$ fenti képlet.

Az izop. egyenlőtlenség bizonyítása előtt beláthúr egy segéd-egyenlőtlenséget (kijöme következmúl is).

<u>Tétel.</u> (Wirtinger) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt. diffhó, $f(a)=f(b)$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(f-\frac{\int_a^b f}{b-a}\right)^2 \le \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \cdot \int_a^b (f')^2$$

(Magasabb dimenzióban is igaz más konstanssal: Poincaré–Wirtinger-egy.)

B: Fth. $\int_a^b f = 0$ (konstans hozzáadása)

Fth. $[a,b]=[0,2\pi]$: eltolás, skálázás:

$$\tilde f(x) = f\left(a + x\cdot\frac{b-a}{2\pi}\right), \quad x\in[0,2\pi]$$

Türi számolással adódúr, hogy $\tilde f$-re elég igazolni.

Legyen tehát f ilyen.

Kell: $\int_0^{2\pi} f^2 \le \int_0^{2\pi} (f')^2$

f-et és f'-t trigo. Fourier-sorba fejtjük.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cdot\cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{ahol} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

L^2-ben konv.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$a_0=0$, mert $\int_0^{2\pi} f\,dx = 0$.

$$f'(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx), \quad \text{ahol } c_n, d_n \text{ F-ehöt.}$$

Levezettúr korábban: $c_0=0$, $c_n = n b_n$, $d_n = -a_n n$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(n b_n \cos nx - n a_n \sin nx), \quad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Parseval $\Rightarrow$ $\int_0^{2\pi} f^2 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$$\int_0^{2\pi}(f')^2 = \pi\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)$$

Nyilván $a_n^2+b_n^2 \le n^2(a_n^2+b_n^2)$ $\forall n$.

$\Rightarrow$ az egyenlőtlenség következik.

Egyenlőség $\Leftrightarrow$ $\forall n\ge 2$-re $a_n=b_n=0$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = A\cdot\cos x + B\sin x = \alpha\cdot\sin(x+\beta)$

addiciós.

$\square$

B_{IPE} $\gamma = (x, y)$

Átparaméterezés: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ és $|\gamma'| = \frac{L}{2\pi}$ konstans

(ez az ívhossz szerinti paraméterezésből jön: az $[0, L]$-en van, ezt transzformáljuk 2π-vel)

γ zárt $\to$ $x(0) = x(2\pi)$

Eltolással elérhető, hogy $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0$ legyen.

Ekkor
$$L^2 - 4\pi A = 2\pi\left(\frac{L^2}{2\pi} - 2 \cdot A\right) =$$
$$= 2\pi\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} (x')^2 + (y')^2}_{\frac{L^2}{(2\pi)^2} \cdot 2\pi} - 2 \cdot \int_0^{2\pi} x y'\right) =$$
$$= 2\pi\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} (y' - x)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left((x')^2 - x^2\right)}_{\geq 0}\right) \geq 0$$

x-re Wirtinger-egyenlőtlenség

Egyenlőség: $y' = x$ és $x(t) = \alpha \sin(t + \beta)$.

$\Rightarrow$ $y(t) = -\alpha \cdot \cos(t + \beta) + c$ $\Rightarrow$ $x^2 + (c - y)^2 = \alpha^2$

$\Rightarrow$ $(x(t), y(t))$ egy körvonalon halad végig.

<u>Megj.</u> $0 \leq L^2 - 4\pi A \leq \frac{1}{4}$ terület (γ evolutája) $\to$ Hurwitz, bonyolultabb.

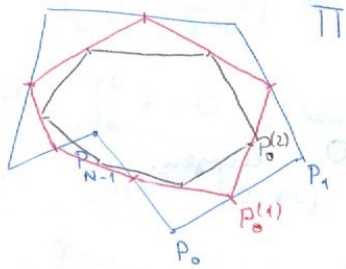
görbületi kpontok görbéje

Ajánlott cikk: Viktor Blåsjö: The isoperimetric problem (A.M. Monthly)

Diszkrét Fourier-analízis

Darboux feladata

Legyen N adott; legyen adott egy N oldalú sokszög a síkon.



$$\Pi = P_0 P_1 \dots P_{N-1}$$

Tekintsük az oldalfelezőpontok által alkotott $P_0^{(1)} P_1^{(1)} \dots P_{N-1}^{(1)}$ sokszöget, ahol $P_j^{(1)}$ a $P_j P_{j+1}$ felezőpontja. (mod N)

$$\longrightarrow \Pi^{(1)} = P_0^{(1)} \dots P_{N-1}^{(1)}$$

Ezt iteráljuk $\longrightarrow \Pi^{(n)} = P_0^{(n)} P_1^{(n)} \dots P_{N-1}^{(n)}$

Kérdés: $\Pi^{(n)} \longrightarrow ?$, ha $n \to \infty$.

Jel. $\omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$

<u>Tétel</u>. $$\sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{kn} \cdot \overline{\omega_N}^{\ln} = \begin{cases} N, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases} \qquad (k, l = 0, 1, \dots, N-1)$$

Ez ortogonalitási tulajdonság: $z = \left(\omega_N^{0k}, \omega_N^{1k}, \dots, \omega_N^{(N-1)k}\right)$

$w = \left(\omega_N^{0l}, \omega_N^{1l}, \dots, \omega_N^{(N-1)l}\right)$ - re

$$\sum \omega_N^{kn} \overline{\omega_N}^{\ln} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

B: $k = l$ - re $\quad \omega_N^{kn} \cdot \overline{\omega_N}^{kn} = |\omega_N|^{2kn} = 1 \quad \Rightarrow \sum = n \cdot 1 = n.$

$k \neq l$ - re $\quad \omega_N^{kn} \cdot \overline{\omega_N}^{\ln} = \left(\omega_N^{k-l}\right)^n =: q^n, \quad q \neq 1 \quad k \neq l$ miatt.

$$\Rightarrow \sum \dots = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{1 - 1}{q - 1} = 0.$$

$\square$

<u>Köv.</u> $$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_N^{0 \cdot 0} & \omega_N^{1 \cdot 0} & \dots & \omega_N^{(N-1) \cdot 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{0(N-1)} & \omega_N^{1 \cdot (N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \text{ - re} \quad \Omega^T = \Omega \quad \text{és} \quad \Omega \Omega^* = N \cdot I_N$$

$\square$

<u>Köv.</u> $\Omega^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \Omega^* = \frac{1}{N} \cdot \overline{\Omega}.$

$\square$

Legyen $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$, ahol z_j a P_j csúcs $\mathbb{C}$-ben.

Tekintsük a $z = \Omega \cdot \zeta$ egyenletrendszert, ahol $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_{N-1})$.

Koordinátánként: $z_k = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{kn} \cdot \zeta_n$

Az egyenletrendszer megoldható: $\zeta = \Omega^{-1} \cdot z = \frac{1}{N} \overline{\Omega} \cdot z$

$$\Rightarrow \zeta_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\omega}_N^{kn} \cdot z_n$$

Speciálisan $\zeta_0 = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_{N-1}}{N}$ a súlypont Π-ben.

Mit jelent a felezőpontos eljárás?

$\Pi^{(1)} = p_0^{(1)} \, p_1^{(1)} \dots p_{N-1}^{(1)}$ -re

$$p_j^{(1)} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\omega_N^{jn} \cdot \zeta_n + \omega_N^{(j+1)n} \cdot \zeta_n \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\left(\frac{1+\omega_N^n}{2} \right)}^{\text{ez az új nevező}} \omega_N^{jn} \zeta_n$$

Az iterációban ezért:

$$p_k^{(l)} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1+\omega_N^n}{2} \right)^l \omega_N^{kn} \zeta_n .$$

Mi történik $l \to \infty$ mellett?

$\left| \frac{1+\omega_N^n}{2} \right| \leq \frac{1+1}{2} = 1$ és egyenlőség csak akkor, ha $n = 0$

$\Rightarrow$ az $\left(\frac{1+\omega_N^n}{2} \right)^l$ tagok 0-hoz tartanak $\forall n \neq 0$ -ra

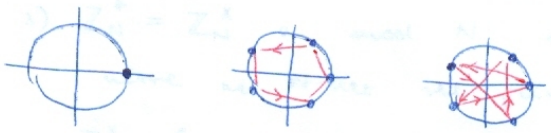
$\Rightarrow p_k^{(l)} \to \zeta_0$ = súlypont. $(l \to \infty)$

Mj Schönberg felépítését követjük. Olvasnivaló: Mathematical Time Exposures 2017.03 (BA)

A $z = \Omega \cdot \zeta$ egyenletrendszer:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix}}_{\Pi \text{ eredeti sorozat}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \vdots \\ \zeta_{N-1} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \Pi_0 \quad \uparrow \Pi_1$



Π_0 Π_1 Π_2 ...

Előállítjuk Π-t $\Pi_0, \dots, \Pi_{N-1}$ lin. komb.-jaként.

Diszkrét Fourier-sorok

Az előbbiek mögött milyen általános elmélet van?

$(z_0, \dots, z_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ volt eddig. Lehet rá fv.-ként tekinteni:

$f : \{0, 1, \dots, N-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(k) = z_k \quad (k = 0, \dots, N-1)$

Jel. $\mathbb{Z}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ az összeadásra.

$f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$

A skalárszorzat legyen $(f, g) := \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\overline{g(n)}$, ez konzisztens a vektorok skalárszorzatával.

Ezzel $L^2(\mathbb{Z}_N)$ euklideszi tér. Triv bázis: $f_n(k) = \delta_{kn}$

De tudunk szebb (harmonikusabb) bázist: $e_n(k) = \exp\left(\frac{2\pi i n k}{N}\right)$,

$n = 0, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$

Ezek valóban lineáris független (és így bázis), mert ortogonálisak:

$$(e_k, e_l) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{nk} \omega_N^{-nl} = N\delta_{kl} \quad \text{(volt)}.$$

Def. $f \in L^2(\mathbb{Z}_n)$ diszkrét Fourier-sora $f = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e_n$.

$$(f, e_k) = N c_k \implies c_n = \frac{1}{N} \cdot (f, e_k) \implies f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f, e_n)\, e_n$$

Def. Az $f \in L^2(\mathbb{Z}_n)$ fv. diszkrét Fourier-transzformáltja $\hat{f}$, ahol

$\hat{f}(k) = (f, e_k), \quad k = 0, \dots, N-1.$

Mj. Darboux megoldásában $f = (z_0, \dots, z_{N-1})$.

$z = \Omega \cdot \zeta$ - ban Ω oszlopai az $e_0, e_1, \dots, e_{N-1}$ bázisvektorok.

$\implies z = \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_n e_n$ diszkrét Fourier-sor.

Tétel. (Parseval-azonosság) $f \in L^2(\mathbb{Z}_N) \implies \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}(n)|^2$

B: Ortogonalitás ill. $f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n)\, e_n$

$$\implies (f, f) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}(n)|^2 \cdot \underbrace{(e_n, e_n)}_{N}$$

□

Tétel. (Plancherel) $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{Z}_N) \implies (f_1, f_2) = \frac{1}{N}(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$

B: Mint előbb.

□

Nem diszkrétben: a Fourier-trafó unitér trafó.

Példa. $N=2$. $f := (1,-1)$, azaz $f(0)=1$, $f(1)=-1$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \underbrace{1}_{e_0} & \underbrace{-1}_{e_1} \end{pmatrix} \qquad \hat{f}(0) = (f, e_0) = 0 \qquad \hat{f}(1) = 2$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(0)\, e_0 + \hat{f}(1)\, e_1\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot e_1 = e_1 \quad \text{Fourier-sor.}$$

azaz $f(k) = (-1)^k$.

Példa. $N=4$ $\quad f := (1, 1, -1, 1)$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

konjugálás

$\hat{f}(0) = 2 \qquad \hat{f}(1) = 1 - i + 1 + i = 2$

$\hat{f}(2) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$

$\hat{f}(3) = 1 + i + 1 - i = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{f} = (2, 2, -2, 2)$

$$f = \frac{1}{4}\left(2\cdot e_0 + 2\cdot e_1 - 2\, e_2 + 2\, e_3\right)$$

$$f(k) = \frac{1}{2}\left(1 + i^k - (-1)^k + (-i)^k\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^k\right) + \cos\frac{k\pi}{2}$$

konjugáltak

Tehát a F-sorfejtés megadja a periodikus kiterjesztést.

Fourier-analízis véges Abel-csoportokon (kitekintés)

Eddig $f: \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$, most $\mathbb{Z}_N$ helyett G véges Abel-csoport.

(E. Stein: Intro. to Fourier Analysis alapján)

$S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ a mértékre.

Def. $\chi : G \to S^1$ homomorfizmus karakter.

Példák 1) Triviális karakter: $1_G(g) = 1 \quad \forall g \in G$

2) $G = \mathbb{Z}_4 = \langle \gamma \rangle$. χ-t meghatározza $\chi(\gamma)$. És $(\chi(\gamma))^4 = 1 \Rightarrow \chi(\gamma)$ negyedik egységgyök $\Rightarrow$ négyféle lehet.

Karaktertáblázat felírható.

	1	γ	γ^2	γ^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

3) $\mathbb{Z}_N^* := \mathbb{Z}_N^\times$ a mod N mértékre nézve az N-hez rel. prím egészek.

$\mathbb{Z}_4^\times = \{1, 3\} \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad 1 \longleftrightarrow 0, \quad 3 \longleftrightarrow 1$

$\Rightarrow$ a karakterek $\mathbb{Z}_2$ két karakterének felelnek meg.

$\chi_1(1) = 1, \quad \chi_1(3) = 1$

$\chi_2(1) = 1, \quad \chi_2(3) = -1$

Ezt $\mathbb{Z}$-re kiterjesztve $\longrightarrow$ Dirichlet-karakter

4) $\mathbb{Z}_8^\times = \{1, 3, 5, 7\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

<u>Def.</u> Karakter konjugáltja: $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)}$.

<u>Def.</u> A $G \to S^1$ karakterek csoportja a pontonkénti szorzásra G duális csoportja: $\widehat{G}$.

Belátható (a korábbiakhoz hasonló módon):

$\widehat{G} \simeq G$

$\widehat{\widehat{G}} \simeq G$, az izomorfizmus a beleágyazás

$$g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$$

$$\sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G|, & \text{ha } \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \text{ha } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases} \qquad \forall \chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$$

ortogonalitás

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi_1(g_1)\overline{\chi_2(g_2)} = \begin{cases} |G|, & \text{ha } g_1 \neq g_2 \\ 0, & \text{ha } g_1 = g_2 \end{cases} \qquad \forall g_1, g_2 \in G$$

<u>Jel.</u> $L^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ az $(f_1, f_2) = \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$ skalárszorzattal

<u>Def.</u> $f \in L^2(G)$ diszkrét Fourier-sora $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} (f, \chi) \cdot \chi$

<u>Def.</u> Az $f \in L^2(G)$ diszkrét Fourier-transzformáltja

$$\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\chi) = (f, \chi)$$

Így $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi$. Korábbiakkal egyező módon:

Parseval: $\sum_{g \in G} |f(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|^2$

Plancherel: $(f_1, f_2)_{L^2(G)} = \frac{1}{|G|} \cdot (\widehat{f_1}, \widehat{f_2})_{L^2(\widehat{G})}$

Ennek számelméleti alkalmazása van. (Szalay M.: Mult. sz.)

Valós diszkrét Fourier-sor

Gauss problémája (1805): Pallas kisbolygó pályáját akarta interpolálni

(θ, X)

↑ szélesség

hosszúság

eszére voltak adatai, azokra akart trigo. polinomot illeszteni: $X = f(\theta)$

„Hogy ezt hogy csinálta, azt nem tudom, hát érdekelő ember volt."

(θ 0°-ból 360°-ig 30°-onként)

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{5}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n\theta}{360}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n\theta}{360}\right)\right) + a_6 \cos\frac{2\pi\cdot 6\theta}{360}$$

↑ ilyen alakban keresse.

↑ fokban számolunk

$N := 12$, $\frac{k}{N} = \frac{\theta}{360}$ → megmaradunk a 360-tól.

$$f(k) = a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) + a_{\frac{N}{2}} \cos\left(\frac{2\pi\cdot\frac{N}{2}\cdot k}{N}\right) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} a_n \cdot \frac{\omega_N^{kn} + \overline{\omega_N}^{kn}}{2} + b_n \frac{\omega_N^{kn} - \overline{\omega_N}^{kn}}{2i}$$

2017.03.30.

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{\frac{a_n - ib_n}{2} = A_n} \omega_N^{kn} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{\frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{A_n}} \overline{\omega_N}^{kn}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} A_n \omega_N^{kn} + \overline{A_n}\,\overline{\omega_N}^{kn}$$

$\overline{\omega_N}^{kn} = \omega_N^{(N-n)\cdot k}$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \omega_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \omega_N^{nk}$$ diszkrét Fourier-sorfejtés

↑ $A_n := A_{N-n}$, ha $n \geq \frac{N}{2}+1$

<u>Áll.</u> $f \in L^2(\mathbb{Z}_N)$ valós értékű $\Rightarrow$ $A_0 \in \mathbb{R}$ és $A_n = \overline{A_{N-n}}$ $(n = 1, 2, \dots, N-1)$

B: $$A_0 = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,\overline{\omega_N}^{0\cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{f(n)}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

$$A_{N-n} = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\,\overline{\omega_N}^{(N-n)\cdot m} = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\,\overline{\omega_N}^{(-nm)} = \overline{\sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{f(m)}_{\in\mathbb{R}}\,\overline{\omega_N}^{+nm}} = \overline{A_n}$$

□

Megj.: Valós diszkrét Fourier-sor: f valós értékű fv.-re

$$f = \hat{f}(0)\cdot e_0 + \left(\hat{f}(1)e_1 + \hat{f}(N-1)\cdot e_{N-1}\right) + \dots + \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{N}{2}\right)\cdot e_{N/2}, & 2 \mid N \\ \left(\hat{f}\left(\frac{N-1}{2}\right) + \hat{f}\left(\frac{N+1}{2}\right)\right) e_{\frac{N+1}{2}}, & 2 \nmid N \end{cases}$$

$$\uparrow \cdot e_{\frac{N-1}{2}}$$

Itt az e_i bázisvektorok.

Kérdés: Hogyan lehet gyorsan számolni a Fourier-transformáltat? (azaz a Fourier-előállítást?) $\quad f \in L^2(\mathbb{Z}_N),\ \omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,\overline{\omega}_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

A szorzás a drága művelet, abból $O(N^2)$ kell.

Hatékonyabban: tfh. $N = 2^r$

$$\hat{f}(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} f(2l)\cdot \overline{\omega}_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} f(2l+1)\,\overline{\omega}_N^{(2l+1)k} =$$

$$\overline{\omega}_N^{2lk} = \exp\left(-\frac{2\pi i 2lk}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i\, lk}{N/2}\right) = \overline{\omega}_{N/2}^{lk} \implies \overline{\omega}_N^{(2l+1)k} = \overline{\omega}_N^{2lk}\cdot\overline{\omega}_N^{k} = \overline{\omega}_{N/2}^{lk}\cdot\overline{\omega}_N^{k}$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2} f(2l)\cdot\overline{\omega}_{N/2}^{lk} + \left(\sum_{l=0}^{N/2} f(2l+1)\cdot\overline{\omega}_{N/2}^{lk}\right)\cdot\overline{\omega}_N^{k}$$

Jel. $f^{(0)} := \left(f(0), f(2), \dots, f(N-2)\right), \quad f^{(1)} := \left(f(1), f(3), \dots, f(N-1)\right)$

Így az előbbi átírható:

$$\hat{f}(k) = \widehat{f^{(0)}}(k) + \overline{\omega}_N^{k}\,\widehat{f^{(1)}}(k), \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1\text{-re}$$

azaz két fél alkalmas vektor F-transformáltját elég kiszámítani.

$$\overline{\omega}_N^{N-k} = \exp\left(-\frac{2\pi i(N-k)}{N}\right) = \exp\left(+\frac{2\pi i k}{N}\right) = \omega_N^{k}$$

$$\implies \hat{f}(k) = \widehat{f^{(0)}}(k) + \overline{\omega}_N^{k}\,\widehat{f^{(1)}}(k) \qquad k = 0, 1, \dots, \tfrac{N}{2}-1\text{-re}$$

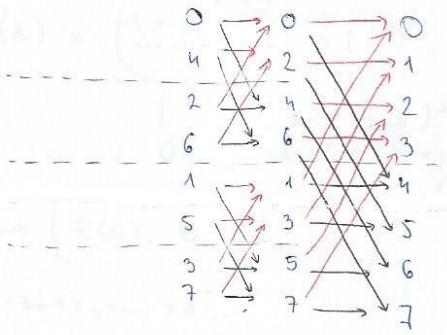
$$\hat{f}\left(k+\tfrac{N}{2}\right) = \widehat{f^{(0)}}(k) - \omega_N^{k}\,\widehat{f^{(1)}}(k) \qquad k = 0, 1, \dots, \tfrac{N}{2}-1\text{-re}$$

„Ezt háromszor átgondoltam, és abból legalább egyszer értettem."

Mert $\overline{\omega}_{N/2}^{lk} = \overline{\omega}_{N/2}^{lk+N/2}$ a fentiekben.

Ezt a műveletet ismételjük: alkalmazzuk $f^{(0)}$-ra és $f^{(1)}$-re, stb.

Példa. $N = 8$:



felfele $\overline{\omega}_N^0, \omega_N^1, \dots$-tal szorozva adunk össze

lefele $-\overline{\omega}_N^0, \dots$-tal szorozva adunk össze

Áll. A műveleges szorzások száma $O(N \log N)$ $\quad (N = 2^r)$

B: $M(N)$ jelölje a szorzások számát. Állítjuk, hogy $M(N) \le N \log N$

Indukció: r szerint.

$r = 1$: 1 szorzás kell.

$N = 2^{r+1}$-re $\quad M(N) = 2 \cdot M(2^r) + 2N \le \overbrace{2 \cdot 2^r}^{N} r + 2N \le$

$\overline{\omega}_N^k$-val való szorzások (feltesszük, hogy magát az $\overline{\omega}_N^k$-t már adottak)

ha az $\overline{\omega}_N^k$-kat is ki kell számolni

$\le N \cdot (r+1) = N \log N$. $\square$

Ez a Fast Fourier transform (FFT). Általánosítható arra is, ha N nem 2-hatvány, de sok kis prímtényező szorzata.

Elrettentésül: ha $N = N_1 \cdot N_2$, akkor

$$\hat{f}(N_2 k_1 + k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left[\overline{\omega}_N^{k_2 n_1} \underbrace{\left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} f(N_1 n_2 + n_1)\, \overline{\omega}_{N_2}^{n_2 k_2} \right)}_{\text{Belső Fourier-trf.}} \right] \overline{\omega}_{N_1}^{n_1 k_1},$$

twiddle factor

ahol $n_1, k_1 = 0, \dots, N_1 - 1$ és $n_2, k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

N_1 db N_2 hosszú vektorunk lesz

Az FFT Cooley–Turey 1965-ös cikkében.

Lánczos Kornél és Danielson 2-hatványokra.

Valójában Gauss ezt már a XIX. században tudta, nem ilyen általánosan: $12 = 3 \cdot 4$, $36 = 6 \cdot 6$-ra.

Kiegészítés a diszkrét Fourier-trafóhoz

Def. Diszkrét konvolúció: $f, g \in L^2(\mathbb{Z}_N)$-re

$$(f * g)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, g(k-n)$$

Áll. $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

B:

$$\widehat{f * g}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (f * g)(n) \cdot \overline{\omega}_N^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\, g(n-m)\, \overline{\omega}_N^{nk} = \qquad l := n - m \Rightarrow n = m + l$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(m)\, g(l)\, \underbrace{\overline{\omega}_N^{(m+l)k}}_{\overline{\omega}_N^{mk} \cdot \overline{\omega}_N^{lk}}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{N-1} f(m)\, \overline{\omega}_N^{mk} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{N-1} g(l)\, \overline{\omega}_N^{lk} \right) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

$\square$

Deltafüggvények

Diszkrét Dirac-delták: $\delta_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$

$$(\delta_n * f)(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \delta_n(l)\, f(k-l) = 1 \cdot f(k-n)$$

Tehát a δ_n-nel való konvolúció egy eltolás (translációt) mindezek segítségével Daubechies feladata a köv. alakra hozható:

$$p_j \longrightarrow p_j^{(1)}$$

$$z_j \longrightarrow z_j^{(1)} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2} \qquad \Rightarrow \quad z^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\delta_0 * z + \delta_{-1} * z\right)$$

Tehát $z^{(k)} \longrightarrow z^{(k+1)}$-nél $z^{(k+1)} = \underbrace{\left(\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}\right)}_{d} * z^{(k)}$

$$\Rightarrow z^{(k)} = \underbrace{d * d * \ldots * d}_{k \text{ darab}} * z$$

$$\Rightarrow \widehat{z^{(k)}} = (\hat{d})^k \cdot \hat{z}$$

$$\hat{d} = \frac{1}{2}\hat{\delta}_0 + \frac{1}{2}\hat{\delta}_{-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{d}(m) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\delta_0(n)\, \overline{\omega}_N^{nm} + \delta_{-1}(n)\, \overline{\omega}_N^{-nm} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + \omega_N^m)$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{z^{(n)}}(k) = \underbrace{\left(\frac{1+\omega_N^k}{2}\right)^n}_{\downarrow} \cdot \hat{z}(k)$$

0, kivéve, ha $k=0$, mert akkor kst. 1

$$\Rightarrow \quad \widehat{z^{(n)}} \longrightarrow \left(\hat{z}(0),\ 0,\ \dots,\ 0\right), \quad \text{midőn } n \longrightarrow +\infty.$$

$$\hat{z}(0) = z_0 + z_1 + \dots + z_{N-1}$$

$$\Rightarrow \quad z^{(n)} \longrightarrow \frac{z_0 + \dots + z_{N-1}}{N}, \quad \text{mert} \quad z^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{z}(n)\cdot e_n \quad \text{és } e_0 = 1.$$

Alkalmazások

2017 (B

Visszatérünk a trigonometrikus Fourier-sorokhoz.

Tétel. $0 < \alpha < 1$, $f_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i\cdot 2^n \cdot x}$. Akkor f_α mindenütt folytonos, de sehol se differiál.

Megj. Weierstrass példája (1872. júl. 18.):

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \cdot x), \quad 0 < b < 1, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Ez hasonlít a fentire.

Megj. f_α valójában ún. hiányos (lacunary) Fourier-sor

Bt: Folytonosság a Weierstrass-kritériumból:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| 2^{-n\alpha} e^{i 2^n x} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} < \infty \quad \text{(mértani sor)}$$

A sehol se differiálhatóságot említi: ha $f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$,

$$S_N = \sum_{|n|\le N} a_n e^{inx}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

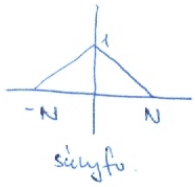
$$\Rightarrow \quad S_N = \sum_{|n|\le N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy\right)\cdot e^{inx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \underbrace{\sum_{|n|\le N} e^{in(x-y)}}_{D_N(x-y)\ \text{Dirichlet-mag}} dy$$

$$\sigma_N = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{N-1}}{N} = \sum_{|n|\le N} \underbrace{\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)}_{\text{súlyfv.}} a_n \cdot e^{inx} =$$

Cesáro-összegzés

Fejér-közép



súlyfv.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \underbrace{\sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right) e^{in(x-y)}}_{F_N(x-y)\ \text{Fejér-mag}} dy$$

Volt: $F_N(x) = \sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{inx} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

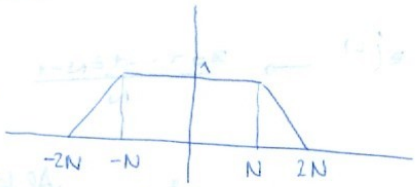
Kiszelektelt rész: $\Delta_N = 2\sigma_{2N} - \sigma_N$

- ha $|n|\le N \to a_n e^{inx}$ elója

$$2\cdot\left(1-\frac{|n|}{2N}\right) - \left(1-\frac{|n|}{N}\right) = 1$$

- ha $N \le |n| \le 2N \Rightarrow a_n e^{inx}$ elója

$$2\cdot\left(1-\frac{|n|}{2N}\right) = 2-\frac{|n|}{N}$$



súlyfv.

Most $f = f_\alpha$-ra alkalmazzuk ezt.

$\Delta_{2^n} = S_{2^n}$, ez a súlyfüggvényből látszik: 2^n és 2^{n+1} között üres 2-hatvány.

$$\Rightarrow \Delta_{2^n}(x) - \Delta_{2^{n-1}}(x) = 2^{-n\alpha}\cdot e^{i2^n x}$$

$$\Rightarrow \left|\Delta'_{2^n}(x) - \Delta'_{2^{n-1}}(x)\right| = \left|2^{(1-\alpha)\cdot n}\, e^{i2^n x}\right| = 2^{(1-\alpha)n} = (2^n)^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \Delta'_{2^n} - \Delta'_{2^{n-1}} = O\left((2^n)^{1-\alpha}\right)$$

Tfh. f_α diffható x_0-ban. Belátjuk, hogy ekkor

$\Delta'_{2^n}(x_0) - \Delta_{2^{n-1}}(x_0) = O(\log 2^n)$; ez ellentmondás az indult levezetéssel.

$\Delta'_N(x_0) = O(\log N)$-et elég belátni.

$\Delta_N(x) = 2\sigma_{2N}(x) - \sigma_N(x)$ $\to$ elég, hogy $\sigma'_N(x_0) = O(\log N)$.

$$\sigma'_N(x) = \sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)a_n\cdot e^{inx}\cdot in = \sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(u)\, e^{in(x_0-y)}\, in\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(y) \underbrace{\sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{in(x_0-y)}\cdot in}_{F'_N(x_0-y)} dy$$

(egyszerűbben: mondhattuk volna, hogy lehet integrálba bederiválni)

$$2\pi\,\sigma_N'(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(y)\cdot F_N'(\underbrace{x_0-y}_{=:\tilde{y}})\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(x_0-\tilde{y})\,F_N'(\tilde{y})\,d\tilde{y} =$$

periodicitás

$\tilde{y} =: y$ abuse of notation

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_\alpha(x_0-y) - f_\alpha(x_0)\right) F_N'(y)\,dy$$

$\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\,dy = 0$

(NL, periodicitás)

f_α diffhó x_0-ban $\to$ $|f_\alpha(x_0-y) - f_\alpha(x_0)| \le C\cdot|y|$

$$\Longrightarrow \quad 2\pi\,|\sigma_N'(x_0)| \le C\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |y|\cdot|F_N'(y)|\,dy =$$

$$= C\cdot\int_{|y|\le\frac{1}{N}} |y|\cdot|F_N'(y)|\,dy + C\cdot\int_{|y|>\frac{1}{N}} |y|\cdot|F_N'(y)|\,dy$$

Kell még $|F_N'(y)|$ becslése.

1) $|F_N'(y)| \le \text{const}\cdot N^2 \quad \forall y$-ra

2) $|F_N'(y)| \le \dfrac{\text{const}}{|y|^2} \quad y \ne 0$-ra

Bizonyítások:

1) $$|F_N'(y)| \le \sum_{|n|\le N} \underbrace{\left|\left(1-\frac{|n|}{N}\right) in\, e^{inx}\right|}_{\le N} \le (2N+1)\cdot N \le \text{const}\cdot N^2$$

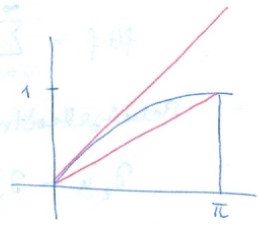
$2N+1$ tag

2) $$F_N'(y) = \frac{\sin\left(\frac{Ny}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{Ny}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} - \frac{1}{N}\cdot\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{Ny}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$|F_N'(y)| \le \frac{\text{const}}{|y|^2} + \frac{\text{const.}}{|y|^2}$$

$|\sin t| \ge \text{const}\cdot|t|$, ha $|t| \le \pi$

ÉS $|\sin t| \le |t|$



Ezek alapján

$$2\pi\,|\sigma_N'(x_0)| \le C\cdot\underbrace{\int_{|y|\le\frac{1}{N}}^{1)} \frac{1}{N}\cdot\text{const}\cdot N^2\,dy}_{\text{const.}} + \underbrace{\int_{|y|>\frac{1}{N}}^{2)} \frac{\text{const}\ t}{|y|}}_{O(\log N)} =$$

$$= O(\log N)$$

□

Megj. Riemann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n}$ folyt., de sehol se diffható. (1861)

Ez nem igaz: van, ahol diffható.

Hardy (1916): nem diffható π racionális többszöröseiben, és bizonyos racionális többszörösben sem.

Gerver (1969): diffható $x = \frac{2p+1}{2q+1}\pi$ alakú pontokban $(p,q \in \mathbb{Z})$

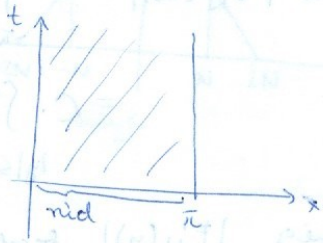
Fourier-sorok parc. differenciálegyenletben

$\partial_t u - \partial_x^2 u = f$ hővezetési egyenlet 1 dimenzióban

$u(0,x) = g(x)$ kezdeti feltétel $\forall x$

$x \in [0,\pi]$, $t \geq 0$

$u(t,x)$ a rúd hőmérséklete az x pontban a t időpillanatban



$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ $\forall t \geq 0$ peremfeltétel.

A hőv. egyenlete vonatkozó vegyes feladat.

Emlék: $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ teljes rendszer $L^2([0,\pi])$-ben

(Konkrétan az volt, hogy $\sin nx$, $\cos nx$ teljes $L^2[0,2\pi]$-ben, ebből páratlan kiterjesztéssel köv.)

Fourier ötlete: keressük u-t $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \sin(nx)$ alakban!

Ez végtelen tudja a peremfeltételt. A másik két feltételhez fejtsük f, g-t Fourier-sorba!

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin nx, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \sin nx$$

Behelyettesítve:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n'(t) + n^2 \cdot \xi_n(t)\right) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin nx$$

$$\Rightarrow \xi_n'(t) + n^2 \cdot \xi_n(t) = \alpha_n(t) \quad \text{(ODE)}$$

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \quad \Rightarrow \xi_n(0) = \beta_n$$

Ez differenciálat ξ_n-re kezdetiérték-feltétellel $\longrightarrow$ ξ_n adódik.

Konkrétan pl. $f = 0$-ra $\alpha_n(t) = 0 \Rightarrow \xi_n(t) = \beta_n \cdot e^{-n^2 t}$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \sin nx$$

Ez végig merőben formális okoskodás volt!

Az $f=0$ esetben belátható, hogy $u(t,x) \to 0$, midőn $t \to +\infty$.

$\downarrow$

se nyelő, se forrás
a peremen végig 0 $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ „végül" az egész rúdon 0 lesz a hőmérséklet.

u simító hatású fv.: ha $g \in L^2$, u mégakkor is sima lesz. (ún. parabolikus simítás). Emiatt a hővezetési folyamat megfordíthatatlan (irreverzibilitás)

A nullánegyenlet ezzel szemben reverzibilis.

Könyvajánló:

- E. Stein, ?: Introduction to Fourier Analysis
- A. Terras: Fourier Analysis on Finite Groups and Applications
- Komornik V., P. Loreti: Fourier Analysis in Control Theory

2017. 04. 20.
(PT)

Stone–Weierstrass-tételkör

Tétel. (Weierstrass 1. approximációs tétele)

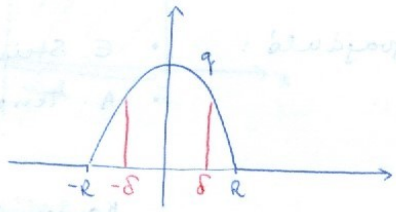
$\forall f \in C[a,b]$ $\exists (p_n)$ polinomsorozat, melyre $p_n \rightrightarrows f$ $[a,b]$-n.

Lemma. $q(x) := \begin{cases} R^2 - x^2, & \text{ha } |x| < R \\ 0, & \text{ha } |x| \geq R \end{cases}$

$\forall \delta > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{|x|\geq\delta} q^n(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}} q^n(x)\,dx} = 0.$$

B_L: Az integrál valójában nem improprius. Ha $\delta \geq R \Rightarrow$ a számláló 0. Ha $\delta < R$: Számlálóra triv becslés:



$$\int_{|x|\geq\delta} q^n(x)\,dx \leq 2\cdot(R-\delta)\cdot \max_{|x|\geq\delta} q^n(x) =$$

$$= 2(R-\delta)\cdot q^n(\delta) < 2R\,q^n(\delta)$$

Nevező: $\int_{\mathbb{R}} q^n(x)\,dx \geq \int_{|x|\leq\frac{\delta}{2}} q^n(x)\,dx \geq \delta \cdot \min_{|x|\leq\frac{\delta}{2}} q^n(x) = \delta\cdot q^n\left(\frac{\delta}{2}\right)$

$$0 \leq \frac{\int\dots}{\int\dots} \leq \frac{2\cdot R\cdot q^n(\delta)}{\delta\cdot q^n\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{2R}{\delta}\left(\frac{q(\delta)}{q\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^n$$

q szig. mon. csökken $[0,R]$-en $\Rightarrow$ a hányados $< 1 \Rightarrow$ az n-edik hatvány 0-hoz tart. $\square$

B_T: Legyen $f \in C[a,b]$ tetsz. Fttn. $f(a) = f(b) = 0$ (lineáris fv. hozzáadása)

Legyen $\tilde{f} = \chi_{[a,b]} f$ az f kiterjesztése $\mathbb{R}$-re.

Heine-tétel: f egy. folyt $[a,b]$-n. $\Rightarrow \tilde{f}$ egy. folyt. $\mathbb{R}$-en.

Legyen $\omega(\delta) = \sup\left\{ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \;\middle|\; |x-y| \leq \delta \right\} \Rightarrow 0 \leq \omega(\delta) < \infty$ $\forall \delta$,

ω mon. nő δ-ban. (sup bővebb halmazon) (ω az ún. folytonossági modulus)

Ekkor $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$. Ugyanis:

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $\tilde{f}$ egy. folytonossága miatt $\exists\delta$, hogy $\forall x,y \in \mathbb{R}$:

$|x-y| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ha $|x-y| \leq \delta$, akkor $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\overset{\text{mp}}{\Rightarrow} \omega(\delta) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, mert $0 \le \omega$ és mon. növő.

Felhasználjuk a lemmát: $R := b-a$, $c_n := \int_{\mathbb{R}} q^n(x)\,dx$, $Q_n(x) = \frac{1}{c_n} q^n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$Q_n(x)$ polynomos, $Q_n = 0$ $\mathbb{R} \setminus (-R, +R)$-en, $\int_{\mathbb{R}} Q_n(x)\,dx = 1$,

és a lemma szerint $\int_{|x| \ge \delta} Q_n(x)\,dx \to 0$, ha $n \to \infty$. $(\forall \delta > 0)$

Legyen $p_n(x) := \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\, Q_n(x-t)\,dt$.

Megmutatjuk: $p_n \rightrightarrows \tilde{f}$ $\mathbb{R}$-en.

$$p_n(x) - \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) \cdot Q_n(x-t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \cdot Q_n(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(t) - \tilde{f}(x)\right) Q_n(x-t)\,dt$$

$$|p_n(x) - \tilde{f}(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(t) - \tilde{f}(x)| \cdot Q_n(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{|x-t| \le \delta} \dots + \int_{|x-t| > \delta} \dots =$$

δ-t később hat. meg

$$\le \omega(\delta) \underbrace{\int_{|x-t| \le \delta} Q_n(t-x)\,dt}_{\le 1} + 2 \max_{[a,b]} |f| \underbrace{\int_{|x-t| > \delta} Q_n(t-x)\,dt}_{= \int_{|y| > \delta} Q_n(y)\,dy} \le$$

$$\le \omega(\delta) + 2 \max_{[a,b]} |f| \cdot \int_{|y| > \delta} Q_n(y)\,dy$$

Legyen δ olyan nagy, hogy $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ezután legyen n olyan nagy, hogy $\int_{|y| > \delta} Q_n(y)\,dy < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2 \max_{[a,b]} |f|}$

(Ilyenek vannak a korábbiak miatt.)

$\Rightarrow |p_n(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon. \Rightarrow p_n \rightrightarrows \tilde{f}$ $\mathbb{R}$-en.

p_n nem polinom $\mathbb{R}$-en (korlátos tartójú), de $p_n|_{[a,b]}$ az:

$$p_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) \underbrace{Q_n(x-t)}_{\substack{\mathbb{R} \setminus (-R,+R)\text{-en} \\ Q_n = 0}}\,dt = \int_{x-R}^{x+R} \tilde{f}(t)\, Q_n(x-t)\,dt$$

$x \in [a,b]$-re $[a,b] \subseteq [x-R, x+R]$, és $[a,b]$-n $\tilde{f} = f$:

$$\Rightarrow p_n(x) = \int_a^b f(t)\, Q_n(x-t)\, dt$$

$$Q_n(x-t) = \frac{1}{c_n} q^n(x-t) = \frac{1}{c_n}\left(R^2 - (x-t)^2\right)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)\, x^k$$

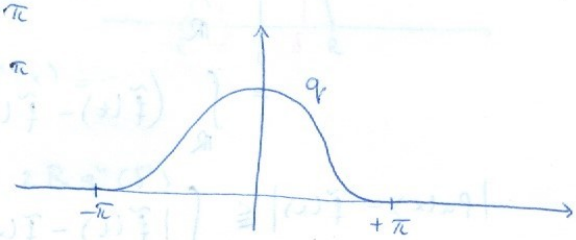
$$\Rightarrow p_n(x) = \int_a^b f(t) \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)\, x^k = \sum_{k=0}^{2n} x^k \underbrace{\int_a^b f(t)\, a_k(t)\, dt}_{A_k} \quad \text{polinom } x\text{-ben.} \qquad \square$$

<u>Tétel</u>. (Weierstrass II. approximációs tétele)

$\forall f \in C(2\pi)$ $\exists (p_n)$ trig. polinomsorozat, hogy $p_n \rightrightarrows f$ $[-\pi, \pi]$-n (és így $\mathbb{R}$-en is).

<u>Lemma</u>. Legyen $q(x) = \begin{cases} 1 + \cos x, & \text{ha } |x| < \pi \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{|x|\geq\delta} q^n(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} q^n(x)\, dx}$$



B_L: q folytonos, $q > 0$, $\mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$-n $q = 0$, q páros fv. és $[0, \pi]$-n sz. monoton csökken.

Ugyanúgy, mint az előző lemmában: ezzel hasonlóan ott is. $\square$

B_T: Legyen $f \in C(2\pi)$, $f(-\pi) = f(\pi)$,

így $(f - f(+\pi))(-\pi) = (f - f(\pi))(+\pi) = 0$.

Ezt pontosan arra lehet approximálni, ha f-re; ftk. $f(\pi) = 0$.

„Ugyanúgy megy, csak az eleje különbözik... meg a vége."

„Az elejének a vége nem ugyanaz, mint a végének az eleje."

Az 1. tétel bizonyításában $\tilde{f} := f$-fel minden elismételhető:

$$c_n = \int_{\mathbb{R}} q^n(x)\, dx, \quad Q_n(x) = \frac{1}{c_n} q^n(x)$$

$$p_n(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, Q_n(x-t)\, dt$$

$\Rightarrow p_n \rightrightarrows f$ $\mathbb{R}$-en.

Kell még: p_n trigo. polinom. $\mathbb{R}$-en.

$$p_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, Q_n(x-t)\, dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\, Q_n(x-t)\, dt =$$

$Q_n(x-t) = \frac{1}{c_n}\left(1+\cos(x-t)\right)^n$ $\Rightarrow$ az integrandus 2π-periodikus

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, Q_n(x-t)\, dt = *$$

$$Q_n(x-t) = \frac{1}{c_n}\left(1+\cos x \cos t + \sin x \sin t\right)^n$$

Teljes indukció: $(1+\cos x \cos t + \sin x \sin t)^n$ az x-nek max. n-edfokú trigo. polinomja. Ez alatt a zárójelen itt jár.

<u>Def.</u> $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$-re $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ legf. n-edfokú trig. polinom; ha $a_n \neq 0$ vagy $b_n \neq 0$, akkor n-edfokú.

$$\Rightarrow Q_n(x-t) = \frac{\alpha_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k(t) \cos kx + \beta_k(t) \sin kx\right)$$

$$* = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\alpha_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k(t) \cos kx + \beta_k(t) \sin kx\right)\right) dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\alpha_0(t)}{2}\, dt}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \alpha_k(t)\, dt}_{a_k} \cos kx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \beta_k(t)\, dt}_{b_k} \sin kx \right)$$

Ez tehát valóban legf. n-edfokú trig. polinom.

<u>Tétel.</u> (Stone–Weierstrass valós változata)

Legyen K kompakt top. tér, $C(K)$ a K-n folytonos, valós értékű függvények halmaza; ez a max-normával Banach-tér: $(C(K), \|\cdot\|_{max})$.

Legyen $\mathcal{A} \subset C(K)$ olyan, hogy

1) $\mathcal{A}$ függvényalgebra $\mathbb{R}$ felett (azaz vektortér és gyűrű)
2) $1_K \in \mathcal{A}$,
3) $\mathcal{A}$ separálja K-t, azaz $\forall x, y \in K$, $x \neq y$ $\exists \varphi \in \mathcal{A}$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű $C(K)$-ban.

Spec. esetek: ① $K = [a,b]$ az euklideszi topológiával, $\mathcal{A} = \{\text{polinomok}\}$ $\Rightarrow$ W. I. tétele

② K = síkon az origó közepű egységkör (eukl. top.),

$\mathcal{A} = \{$ trigonometrikus polinomok K-ra megszűkítve $\}$

$\Rightarrow$ ha p trigonometrikus polinom, K-t pedig $(\cos t, \sin t)$-vel paraméterezzük $(t \in [0, 2\pi])$ $\Rightarrow$ $p(\cos t, \sin t)$ trig. polinom $\Rightarrow$ W. II. tétele

Vektorháló (függvényháló)

Def. $X \neq \emptyset$, f, g X-en értelmezett valós függvényre

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), \qquad \forall x \in X. \qquad \text{(unió)}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{(metszet)}$$

Def. $X \neq \emptyset$, az X-en értelmezett valós függvényből álló V halmazt valós vektorhálónak (fokhálónak) hívjuk, ha

1) V valós vektortér
2) V zárt $\vee$-ra és $\wedge$-re. (ezek közül az egyik elég)
3) $\forall f \in V$, $f \geq 0$: $f \wedge 1_X \in V$. (erre most nem lesz szükségünk)

okt. 04. 27. (PT)

Áll. A valós fokháló definíciójában 1)-vel ekvivalens

2^*) $f \in V \Rightarrow |f| \in V$.

B: 2) $\Rightarrow$ 2^*):

$$f \in V, \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_+ = \underset{\in V}{f} \vee \underset{\in V}{0_X}}_{\in V} \qquad f_- = \underbrace{-(f \wedge 0_X)}_{\in V}$$

$$|f| = f_+ + f_- \in V \quad \checkmark$$

$2^*) \Rightarrow 2)$:

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in V$$
$$f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in V$$

$\square$

Példák. 1, X top. tér, $C(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ folyt.} \}$

Nyilván vt, és $|\cdot|$-re zárt.

$1_X \in C(X) \Rightarrow f \wedge 1_X$ automatikusan $C(X)$-beli

Def. $f : X \to \mathbb{R}$-re $\operatorname{supp} f = \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}$ tartó.

2, X top. tér, $C_0(X) = \{ f \in C(X) \mid \operatorname{supp} f \subset X \text{ kompakt} \}$

1) és 2) triv.

3)-nál most $1_X \notin C_0(X)$, de ez nem gond, mégcsak is igaz. (hacsak X nem kompakt)

3, $1 \leq p < \infty$, $L^p(X)$ valós fokháló.

$$0 \leq \underbrace{f \wedge 1_X}_{\text{mér.}} \leq f \in L^p(X) \Rightarrow f \wedge 1_X \in L^p(X)$$

Feladat. $H^1(\Omega)$ - függvényháló?

Def. Legyen $X \neq \emptyset$. Az X-en értelmezett $\mathbb{C}$-értékű fv-ek egy V halmazát komplex (fv-ekből álló) vektorhálónak / fvhálónak nevezzük, ha 1) V $\mathbb{C}$-vektortér

2) $\{\operatorname{Re} f \mid f \in V\}$ valós vektorháló.

Stone–Weierstrass valós bizi:

1. lépés. Legyen $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $\exists \psi \in \mathcal{A}$, hogy $\psi(x_1) = \alpha_1$, $\psi(x_2) = \alpha_2$.

Mivel $\mathcal{A}$ separál, $\exists \varphi \in \mathcal{A}$: $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Legyen $\psi_1(x_1) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} \Rightarrow \psi_1(x_1) = 1$, $\psi_1(x_2) = 0$.

$\psi_1 \in \mathcal{A}$, mert $\mathcal{A}$ vektortér.

Szerepcserével $\psi_2 \in \mathcal{A}$, $\psi_2(x_1) = 0$, $\psi_2(x_2) = 1$.

Ekkor $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \in \mathcal{A}$ igazolja az 1. lépést. ✓

2. lépés. $\varphi \in \mathcal{A} \Rightarrow |\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$.

Tudjuk, hogy $(1+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} y^n$; ha $\alpha > 0$, akkor $y \in [-1, +1]$-re, (Raabe-Ernt; Abel-tétel)

és a konvergencia egyenletes $[-1, +1]$-en.

$\varphi = 0_K$-ra triv., tfh. $\varphi \neq 0_K$. $\Rightarrow T = \|\varphi\|_{max} > 0$.

$\psi := \dfrac{\varphi}{T} \in \mathcal{A}$ normált, $0 \leq |\psi| \leq 1$

$$|\psi| = \sqrt{\psi^2} = \sqrt{1 + \underbrace{(\psi^2 - 1)}_{|\psi^2 - 1| \leq 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (\psi^2 - 1)^n$$

A konvergencia K-n egyenletes.

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} (\psi^2(x) - 1)^k, \quad x \in K \Rightarrow \underbrace{s_n \rightrightarrows |\psi| \quad K\text{-n.}}_{\Leftrightarrow \|s_n - |\psi|\|_{max} \to 0.}$$

Itt s_n $\psi \in \mathcal{A}$-nak polinomja $\Rightarrow s_n \in \mathcal{A}$, ezért

$\lim_{n \to \infty} s_n = |\psi| \in \overline{\mathcal{A}}$.

$\mathcal{A}$ vektortér $\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ vektortér, mert $\mathcal{A} \subset C(K)$ vektoralgebra, és altér lezártja altér. Ezért $\varphi = T \cdot \psi \in \mathcal{A}$.

3. lépés. $\overline{\mathcal{A}}$ valós faktoráló.

- $\overline{\mathcal{A}}$ valós vt, ezt az előbb láttuk.
- $\overline{\mathcal{A}}$ zárt az abs. értékre: $\varphi \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow |\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$.

$(\varphi_n) \subset \mathcal{A}$, $\varphi_n \xrightarrow{e} \varphi$ közelítés K-n

$\Rightarrow \underbrace{|\varphi_n|}_{\overline{\mathcal{A}}} \xrightarrow{e} |\varphi|$ (mert $||\varphi_n| - |\varphi|| \leq |\varphi_n - \varphi|$)

$\Rightarrow |\varphi| \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$

- $f \wedge 1_X \in \overline{\mathcal{A}}$, mert az előző miatt $\overline{\mathcal{A}}$ $\wedge$-re zárt és $1_X \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. ✓

4. lépés $\overline{\mathcal{A}}$ sűrű $C(K)$-ban.

$f \in C(K)$ tetsz., $\varepsilon > 0$ tetsz. Kell $g \in \overline{\mathcal{A}}$, hogy $\|f - g\|_{max} < \varepsilon$.

① Legyen $r \neq s \in K$ tetsz.; ezekre az 1. lépés miatt $\exists \varphi_{r,s} \in \mathcal{A}$,

$\varphi_{r,s}(r) = f(r)$, $\varphi_{r,s}(s) = f(s)$

Ha $r = s$, akkor legyen $\varphi_{r,r}$ tetsz. olyan $\mathcal{A}$-beli, hogy $\varphi_{r,r}(r) = f(r)$, ilyen nyilván van.

② Legyen r rögzített. $\Rightarrow (\varphi_{r,s} - f)(s) = 0$ és $\varphi_{r,s} - f$ folytonos

$\Rightarrow$ ε-hoz $\exists U_s \ni s$ ezt, hogy $|\varphi_{r,s} - f| < \varepsilon$ U_s-en.

$\Rightarrow \varphi_{r,s} - f < \varepsilon$ U_s-en $\Rightarrow \varphi_{r,s} < f + \varepsilon$ U_s-en.

$\bigcup_{s \in K} \underbrace{U_s}_{\ni s} = K$ nyílt fedés, K kpt $\Rightarrow \exists s_1, \dots, s_n \in K$, hogy

$\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} = K$.

Legyen $g_r := \bigwedge_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi_{r,s_i}}_{\in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}} \in \overline{\mathcal{A}}$

$\forall i$: $\varphi_{r,s_i}(r) = f(r) \Rightarrow g_r(r) = f(r)$

$\forall x \in K$ $\exists i$: $x \in U_{s_i} \Rightarrow \varphi_{r,s_i}(x) \leq f(x) + \varepsilon$ $\forall x \in K \Rightarrow g_r \leq f + \varepsilon$

(Ha még $f - \varepsilon \leq g_r$ is igaz lenne, az jó lenne. De nem igaz.)

③ $g_r - f \in C(K)$, $(g_r - f)(r) = 0$

Folytonosság $\Rightarrow$ ε-hoz $\exists V_r \ni r$ köz., hogy $|g_r - f| < \varepsilon$ V_r-en.

$\Rightarrow$ $g_r - f > -\varepsilon$ $\Rightarrow$ $f - \varepsilon < g_r$ V_r-en.

$K = \bigcup_{r \in K} V_r$ nyílt fedés $\Rightarrow$ $\exists r_1, \dots, r_m \in K$, hogy $\bigcup_{i=1}^{m} V_{r_i} = K$

$\forall x \in K$: $\exists i$: $x \in V_{r_i}$ $\Rightarrow$ $f(x) - \varepsilon < g_{r_i}(x) \le \bigvee_{i=1}^{m} \underbrace{g_{r_i}(x)}_{\in \bar{\mathcal{A}}} =: \underbrace{g(x)}_{\in \bar{\mathcal{A}}}$.

$\forall r \in K$ $\quad g_r \le f + \varepsilon$ $\Rightarrow$ $g_{r_i} \le f + \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\bigvee_{i=1}^{m} g_{r_i}(x) \le f(x) + \varepsilon$. $(K\text{-n})$

$\Rightarrow$ $f - \varepsilon \le g \le f + \varepsilon$, és $g \in \bar{\mathcal{A}}$.

K kompakt $\Rightarrow$ $\|f - g\|_{max} \le \varepsilon$.

Tehát $\bar{\mathcal{A}}$ sűrű és zárt $(C(K), \|\cdot\|_{max})$-ban $\Rightarrow$ $\mathcal{A} = C(K)$.

<u>Tétel.</u> (Stone–Weierstrass komplex változata).

Legyen K kompakt top. tér, $C(K)$ jelölje a K-n értelmezett komplex értékű folytonos függvények halmazát $\|\cdot\|_{max}$-mal.

Legyen $\mathcal{A} \subset C(K)$ olyan, hogy

1) $\mathcal{A}$ komplex függvényalgebra
2) $1_K \in \mathcal{A}$
3) $\mathcal{A}$ neparálja K-t
4) $\varphi \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\varphi} \in \mathcal{A}$.

Akkor $\bar{\mathcal{A}} = C(K)$.

B: Legyen $\mathcal{A}_0$ az $\mathcal{A}$-beli valós értékű függvények halmaza.

Ha $\varphi \in \mathcal{A}$ és $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ algebrai alak, akkor

$$\bar{\varphi} = \varphi_1 - i\varphi_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2} \in \mathcal{A}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i} \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}_0$ kielégíti a valós SW-tétel feltételeit:

1) $\mathcal{A}_0$ valós f. algebra, mert $\mathcal{A}$ az és $\mathcal{A}_0$ zárt a műveletekre
2) $1_K \in \mathcal{A}_0$, mert $1_K \in \mathcal{A}$ és valós értékű
3) $\mathcal{A}_0$ neparál, mert $\mathcal{A}$ neparál: $\forall x \neq y \in K$ $\exists \varphi \in \mathcal{A}$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

$\Rightarrow$ $(\underbrace{\mathrm{Re}\,\varphi}_{\in \mathcal{A}_0})(x) \neq (\mathrm{Re}\,\varphi)(y)$ vagy $(\underbrace{\mathrm{Im}\,\varphi}_{\in \mathcal{A}_0})(x) \neq (\mathrm{Im}\,\varphi)(y)$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_0$ sűrű a valós $C(K)$-ban.

legyen $\varepsilon > 0$.

Ha $f \in C(K)$ és $f = f_1 + i f_2$ alg. alak, akkor

f_1, f_2 valós értékű folyt. fv. $\Rightarrow \exists\, g_1, g_2 \in \mathcal{A}_0$:

$\|f_1 - g_1\|_{max} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|f_2 - g_2\|_{max} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \|f - \underbrace{(g_1 + i g_2)}_{g \in \mathcal{A}}\|_{max} < \varepsilon.$$

□

Legendre-polinomok

Emlék: $H = \{1, x, x^2, \dots\}$ lin. független bármely (a,b) (korlátos) intervallumon. $L^2(a,b)$-ben a Gram–Schmidt-eljárással kapunk ortogonális, és aztán ortonormált polinomrendszert ezekből. (ONPR)

Bármely két korlátos nyílt ív. lineáris transzformával egymásba vihető; ilyenkor az L^2-beli fvnek L^2-beli fvnekké marad át. Ezért elegendő $(-1, 1)$-en vizsgálni.

Itt $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f \cdot g$ és $f \perp g \iff \int_{-1}^{1} f \cdot g = 0$. $\forall f, g \in L^2(-1,1)$

<u>Def.</u> Ha az $L^2(-1,1)$-ben a H hatványfvény-rendszert Gram–Schmidt-eljárással ortogonalizáljuk és normáljuk, akkor a kapott polinomrendszer tagjait normált Legendre-polinomoknak nevezzük. Az n-edik normált Legendre-polinom p_n.

Tudjuk, hogy $\deg p_n = n$ és főegyütthatója pozitív $\forall n$

<u>Áll.</u> Minden $m < n$ esetén $\int_{-1}^{1} p_n(x) \cdot x^m \, dx = 0$.

B: $x^m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(x)$ GS miatt

$p_n \perp p_k$ $\forall k = 1, \dots, m$ $\Rightarrow x^m \perp p_n$. □

<u>Köv.</u> Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor p_n ortogonális minden legfeljebb n fokú polinomra. □

<u>Áll.</u> Ha P_n n-edfokú polinom és $\forall m < n$ esetén $\int_{-1}^{1} P_n(x) x^m = 0$, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $P_n = c \cdot p_n$

B: $P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k$. A feltételből köv., hogy P_n ortogonális minden legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomra $\Rightarrow$ p_0-ra, p_1-re, ..., p_{n-1}-re

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow P_n = \alpha_n \cdot p_n, \quad \alpha_n = C$

Keressünk ilyen polinomot! Ezt $q_n^{(n)}(x)$ alakban keressük, ahol q_n $2n$-edfokú polinom.

Ha $m < n$: $$0 = \int_{-1}^{1} q_n^{(n)}(x)\, x^m \, dx = \underbrace{\left[q_n^{(n-1)}(x) \cdot x^m \right]_{-1}^{1}}_{0?} - m \int_{-1}^{1} q_n^{(n-1)}(x)\, x^{m-1} dx$$

$$= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} q_n^{(n-m)}(x)\, dx = (-1)^m m! \underbrace{\left[q_n^{(n-m-1)}(x) \right]_{-1}^{1}}_{0?} = 0$$

$m-1$ db parc. integrálás

A ?-es rész igazat lenne, ha $q_n^{(k)}(-1) = q_n^{(k)}(1) = 0$ lenne $\forall k = 0, \dots, n-1$-re. Ilyet tudunk: $q_n(x) = (x-1)^n (x+1)^n = (x^2-1)^n$

Áll. $p_n(x) = c \cdot \left((x^2-1)^n \right)^{(n)}$, $c > 0$, konkrétan $c = \| q_n^{(n)} \|_{L^2(-1,1)}^{-1}$

$$\| q_n^{(n)} \|^2_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} q_n^{(n)}(x) \cdot q_n^{(n)}(x) = \left[q_n^{(n-1)} \cdot q_n^{(n)} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} q_n^{(n-1)} \cdot q_n^{(n+1)} dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} q_n(x) \cdot q_n^{(2n)}(x) = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \underbrace{\left((x^2-1)^n \right)^{(2n)}}_{(2n)!} dx =$$

$n-1$ parc. int.

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2 \cdot (2n)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t \, dt \end{array} \right| = 2 \cdot (2n)! \int_{\pi/2}^{0} \sin^{2n} t \, (-\sin t) \, dt = 2 \cdot (2n)! \underbrace{\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt}_{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} =$$

rekurzióval

$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \left((2n)!! \right)^2 \Rightarrow \| q_n^{(n)} \|_{L^2(-1,1)} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \cdot (2n)!!$$

Tétel. $$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{(2n)!!} \cdot \left((x^2-1)^n \right)^{(n)}$$

Eredetileg Legendre idejében még nem volt L^2.

Def. n-edik klasszikus Legendre-polinom: $P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \left((x^2-1)^n \right)^{(n)}$.

Ennek a konstans tényezőnek az az előnye, hogy $P_n(1)=1$.

Ui. $\left((x^2-1)^n\right)^{(n)} = \left((x-1)^n (x+1)^n\right)^{(n)} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\left((x-1)^n\right)^{(k)}}_{\substack{=0,\ \text{ha } k<n \\ \text{at } x=1\text{-ben}}} \left((x+1)^n\right)^{(n-k)}$$

$$\Rightarrow \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}\Big|_{x=1} = \binom{n}{n} n! \cdot 2^n = (2n)!!$$

Áll. Az n-edik Legendre-polinomnak (akár normált, akár klasszikus) n darab $(-1,1)$-beli valós gyöke van.

B: Rolle-tétel $(x^2-1)^n$-re, $\left((x^2-1)^n\right)'$-re, ..., $\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$-re sorban egymás után. □

Tétel. A Legendre-polinomok (p_n) ONPR-e teljes $L^2(-1,1)$-ben.

B: Ez azt jelenti, hogy ha $f \in L^2(-1,1)$ és $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\int_{-1}^{1} f(x)\, p_n(x) = 0$ esetén $f=0$ m.m. $(-1,1)$-en.

Ekvivalens: $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot x^n \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f=0$ m.m. $(-1,1)$-en.

1. bizi. Visszavezetjük a komplex trig. rendszer teljességére. (Ezt SLP nem bizonyította). Legyen $g(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right)$ $x \in (-1,1)$-re

Ekkor $f \in L^2(-1,1) \Leftrightarrow g \in L^2(-\pi,\pi)$ és $f=0$ m.m. $\Leftrightarrow g=0$ m.m.

A komplex trig. rendszer e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$ teljes

Megmutatjuk, hogy $(g, e^{inx})_{L^2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Ebből köv., hogy $g(x)=0$ m.m. $(-\pi,\pi)$-n.

$$e^{-inx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-in)^k}{k!} x^k$$ egyenletesen konvergens $(-1,1)$-en

$$(g, e^{inx}) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-in)^k}{k!} x^k \, dx \underset{\text{egy. konv.}}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, x^k \, dx\right)}_{0} \frac{(-in)^k}{k!} = 0.$$

✓

2. bíz. Legyen $g \in C[-1,1]$ tetsz. W.I. szerint $\exists (q_n)$ polinomsorozat, hogy $q_n \rightrightarrows g$ $[-1,1]$-en.

Ekkor $\int_{-1}^{1} f \cdot q_n \longrightarrow \int_{-1}^{1} f \cdot g$.

Mert:
$$\left| \int_{-1}^{1} f \cdot q_n - \int_{-1}^{1} f \cdot g \right| = \left| \int_{-1}^{1} f \cdot (q_n - g) \right| \leq$$
$$\leq \max_{[-1,1]} |(q_n - g)| \cdot \|f\|_{L^1[-1,1]}$$

Véges intervallumon $L^2 \subset L^1 \Rightarrow \|f\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f| \in \mathbb{R}$,

$\max |q_n - g| \to 0$. $(n \to \infty)$

Mivel $\int_{-1}^{1} f \cdot q_n = 0$, ezért $\int_{-1}^{1} f \cdot g = 0$.

$\Rightarrow$ f ortogonális $C[-1,1]$-ra.

Speciálisan a $C_0(-1,1)$ rpt. tartójú folytonosakra is ortogonálisak, és ezek sűrű részhalmaz L^2-ben (BN) $\Rightarrow$ $f = 0$ m.m. $(-1,1)$-en. ✓ □

<u>Tétel</u>. (P_n-ek generátorfüggvénye) Ha $x, u \in \mathbb{R}$ és $|u| \cdot (2|x| + |u|) < 1$, akkor
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot u^n$$

B: $$(1 - 2xu + u^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{\text{bin. sorfejtés}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (u^2 - 2xu)^n = 1 - \frac{1}{2}(u^2 - 2xu) + \frac{3}{8}\underbrace{(u^2 - 2xu)^2}_{u^4 - 4u^3x + 4x^2u^2} - \dots$$

A sor abs. konvergens, ha a feltétel teljesül.

lehet átrendezni (miért?)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \cdot u^n$$

R_n: n-edfokú polinom

„Ha valaki azt elmondja itt, annak nagyon fogok örülni, mert végre én is tudni fogom, hogyan kell bizonyítani."

Szorzunk x^k-val $(k < n)$, és integrálunk x szerint.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (1 - 2xu + u^2)^{-\frac{1}{2}} x^k \, dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \, u^n x^k \, dx =$$

a konvergencia egyenletes

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} R_n(x) \, x^k \, dx \cdot u^n \right) =$$

Helyettesítés: $x = -y + \frac{u}{2}(1-y^2)$. $x = 1$-re $y = -1$,
$x = -1$-re $y = 1$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2xu+u^2)^{-\frac{1}{2}}}_{-dy} x^k \, dx = \int_{1}^{-1} -\left(\frac{u}{2}(1-y^2) - y\right)^k dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{u}{2}(1-y^2) - y\right)^k dy = u\text{-nak } k\text{-adfokú polinomja}$$

$\Rightarrow$ a végtelen sorban u^n elája 0, ha $n > k$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} R_n(x) \cdot x^k \, dx = 0 \quad \forall k < n$$

$$\Rightarrow R_n(x) = C_n \cdot P_n(x)$$

$C_n = 1$ lesz: amikor a generátorfüggvényt sorba fejtettük, akkor

$$(1-2ux+u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \, u^n \quad \text{az } x=1\text{-ben}$$

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{R_n(1)}_{1} \cdot u^n$$

1, mert ez a mértani sor

$R_n(1) = 1$, $P_n(1) = 1$ $\Rightarrow$ $C_n = 1$. $\square$

<u>Tétel.</u> $(n+1) \cdot P_{n+1}(x) = (2n+1) P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x)$ $\forall n \geq 1$.

„Most jön az a tétel, amit úgy sem tudok fejből."

B: Legyen $g(x,u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{1}{2} \cdot (1-2xu+u^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x+2u) \qquad / \cdot (1-2xu+u^2)$$

$$(1-2xu+u^2) \cdot \frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = (x-u) \cdot g(x,u) \qquad (*)$$

$$g(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot u^n \xRightarrow[\text{konvergencia-intervallum belsejében tagonként deriválás}]{} \frac{\partial g}{\partial u} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \cdot n \cdot u^{n-1}$$

Ezt beírjuk $(*)$-ba, együtthatók összehasonlítása... $\square$

Áll. Minden (klasszikus vagy normált) Legendre-polinom kielégíti az

$$\left((1-x^2)\, y(x)\right)' = -n\cdot(n+1)\cdot y(x)$$ differenciálegyenletet.

B: $q_n(x) = (x^2-1)^n$

$\Rightarrow (x^2-1)\cdot q_n'(x) = 2\cdot n\, x\cdot q_n(x)$

Mindkét oldalt $(n+1)$-szer deriválunk: bal oldalon 3, jobb oldalon 2 tag, q_n sorozat deriváltjai szerepelnek.

$c_n\cdot q_n^{(n)}$ helyére p_n-et, ill. P_n-et beírva adódik a differenciálegyenlet. □

Hobson-tétel. Ha $f\in L^2(-1,1)$ minden pontban kielégíti Hölder valamilyen pozitív kitevővel ($\forall \varepsilon\ \exists K:\ |x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le K\cdot|x-y|$), akkor a normált (p_n) Legendre-polinomok szerinti Fourier-sora f-nek pontonként konvergál f-hez.

Ha I nem korlátos, akkor $1, x, x^2, \dots \notin L^2(I)$ $\longrightarrow$ gond. 2017.05.

Módosítás: szorzás csökkenő súlyfüggvénnyel.

Legyen $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, $\rho: I\to\mathbb{R}$ integrálható fv., $\rho>0$ I-n.

$g(x) := \int_{-\infty}^{x}\rho$ szig. mon. növekvő $\to$ I-n meghatároz egy Lebesgue–Stieltjes-mértéket. Legyen $L^2_\rho(I)$ az L^2 tér az I intervallumon a μ_g mértékkel $\longrightarrow$ az L^2-tér, spec. Hilbert-tér.

SH $(f_1,f_2)_\rho = \int_I f_1\cdot f_2\,\mu_g = \int_I f_1\cdot f_2\cdot\rho$ a skalárszorzat.

A hatványfüggvények bene vannak? Nem biztos. De ha igen, akkor lin. ftonek, mert lineáris kombinációjuk polinom, aminek $(\cdot,\cdot)_\rho$-normája pozitív $\Rightarrow$ a lineáriskombináció nem lehet 0.

$\to$ lehet GS-ortogonalizáci: jön (p_n) ONPR. Ennek $\deg p_n = n$, p_n főegyütthatója pozitív, és ha q polinom, akkor $(p_n, q)_\rho = 0$. ($\deg q < n$) (Bizonyítás, mint Legendre-nál.

Megfordítva: ha p polinom, $\deg p = n$ és $\forall q$ polinomra $\deg q < n \Rightarrow (p,q)_\rho = 0$, akkor $p = c \cdot p_n$.

Áll. p_n-nek n db egyszeres gyöke van I-ben $\forall n \geq 1$.

B: $(p_n, p_0)_\rho = 0$

$$(p_n, p_0)_\rho = \int_I p_n \cdot \underbrace{p_0}_{\text{konst.}} \cdot \underbrace{\rho}_{>0 \text{ m.m.}} \Rightarrow p_n \text{ nem lehet állandó előjelű}$$

Ha p_n előjelet vált $x_1, \dots, x_m$-ben $\Rightarrow$

$q(x) := (x - x_1) \dots (x - x_m)$, $p_n \cdot q$ állandó előjelű

$$\Rightarrow (p_n, q)_\rho = \int_I p_n \cdot q \cdot \rho \neq 0.$$

Ezért $\deg q \geq n$, de $\deg p_n = n \Rightarrow$ pont ez az n zh. van. $\square$

Tétel. I korlátos, $\rho \in L^1(I)$, $\rho > 0$ m.m. $\Rightarrow L^2_\rho(I)$ teljes és az $1, x, x^2, \dots \in L^2_\rho(I)$.

Tétel. (BN) Ha I tetszőleges intervallum, $\rho \in L^1(I)$, $\rho > 0$ m.m. és $\exists r > 0$, hogy $\int_I e^{r|x|} \rho(x)\, dx < \infty$, azaz $e^{r|x|} \cdot \rho(x) \in L^1(I)$, akkor $L^2_\rho(I)$ teljes és $1, \dots \in L^2_\rho(I)$.

A korlátos eset ugyanúgy, mint Legendre-nél, mindkét bizonyítás működik. A másik bizonyítás komplex. trig. rendszere vezethető vissza, szőkefalvi-szőnyi.

$$e^{r|x|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n |x|^n}{n!} \geq \frac{r^{2n} \cdot |x|^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \frac{(2n)!}{r^{2n}} e^{r|x|} \geq x^{2n}$$

ρ-val szorzás és I-n integrálás után adódik, hogy

$$\int_I x^{2n} \rho(x)\, dx \leq \frac{(2n)!}{r^{2n}} \int_I e^{r|x|} \cdot \rho(x)\, dx < \infty \Rightarrow x^{2n} \in L^2_\rho(I).$$

Neveretes OPR-ek

① elsőfajú Csebisev-polinomok.

Lemma: $\cos ny = 2^{n-1} \cos^n y + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos^k y$

B: Teljes indukció, trig. azonosság.

Def. $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ elsőfajú Csebisev-polinom.

Áll. (T_n) ortogonális $(-1,1)$-en $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-re.

B: $\int_{-1}^{+1} T_n(x)\, T_k(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$y := \arccos x$

$\cos y = x$

$-\sin y\, dy = dx$

$= \int_{\pi}^{0} \cos ny \cos ky \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot (-\sin y)\, dy =$

$= \int_{0}^{\pi} \cos ny \cdot \cos ky = 0$, mert a cos ortogonális $(-\pi,\pi)$-n, és a paritás miatt $(0,\pi)$-n is.

Ha $n=k$: $\int_{-1}^{+1} T_n^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos^2 ny\, dy = \begin{cases} \pi, & \text{ha } n=0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } n \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2, \dots$ ONPR.

Áll. $L^2_\rho(-1,1)$-ben az elsőfajú Csebisev-polinomok teljes OPR.

Tulajdonságok:

1) Generátorfv. $\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n$

Biz. $x = \cos y$, perc törtre bontás, mértani sorok.

2) $T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$

Biz: $x = \cos y \Rightarrow \cos((n+1)y) = 2\cos(y)\cos(ny) - \cos((n-1)y)$ ✓

3) $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ igaz T_n-re

$\tilde{y}(t) := y(\cos t) \Rightarrow y(x) = \tilde{y}(\arccos x)$

$$\Rightarrow y'(x) = \tilde{y}'(\arccos x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''(x) = \tilde{y}''(\arccos x) \frac{1}{1-x^2} + y'(\arccos x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} (-2x)$$

$\rightarrow \tilde{y}'' + n^2 \tilde{y} = 0 \rightarrow \tilde{y}(t) = c_1 \cdot \cos(nt) + c_2 \cdot \sin(nt)$

$t := \arccos x \rightarrow y(x) = \tilde{y}(\arccos x) = c_1 T_n(x) + c_2 \underbrace{\sin(n \arccos x)}_{\text{nem polinom}}$

(lesz: $U_n(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$)

Áll. Ha Q n-edfokú polinom, Q főegyütthatója 2^{n-1} (mint T_n-nek) $\Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} |Q| \geq \max\limits_{[-1,1]} |T_n|$.

Megj. Legendre-polinomra hasonlóan $\|Q\|_{L^2} \geq \|P_n\|_{L^2}$.

Bi: $T_n(x) = \cos((\arccos x) \cdot n)$ szélsőértékhelyei:

$n \cdot \arccos x = k\pi$

$x = \cos \frac{k\pi}{n}$ $\quad k = 0, 1, \dots, n$ ($n+1$ db).

max. és min. felváltva jönnek.

↯ Ha $\deg Q = n$, Q főegyütthatója 2^{n-1} és $\max |Q| < \max |T_n| = 1 \longrightarrow R := T_n - Q$, ekkor $R > 0$ a T_n maxhelyein és $R < 0$ a T_n minhelyein $\Rightarrow$ van $n+1$ előjelváltása Bolzano-tétel $\Rightarrow$ R-nek n db gyöke, de $\deg R \leq n-1$ ↯ □

② Másodfajú Csebisev-polinomok

Lemma. $$\frac{\sin((n+1)y)}{\sin y} = 2^n \cdot \cos^n y + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cos^k y$$

B: Teljes indukció. □

Def. $U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ másodfajú Csebisev-p.

Áll. (U_n) OPR $(-1,1)$-en $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$-re.

B: Ugyanúgy, mint elsőfajúra. □

$\|U_n\|_\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, U_n\right)$ ONPR

Áll. (U_n) teljes $L^2_\rho(-1,1)$-ben.

B: Ugyanúgy: $(-1,1)$ korlátos, ρ folytonos.

Tulajdonságok

1) Gfv. $\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\, t^n$

2) Rekurzió. $U_{n+1}(x) = 2x\, U_n(x) - U_{n-1}(x)$

3) Diffegyenlet: $(1-x^2)\, y''(x) - 3x\, y'(x) + n(n+2)\, y = 0$ U_n-re.

Bizonyítások ugyanúgy.

③ Jacobi-polinomok.

$(-1,1)$-en. $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, ahol $\alpha, \beta > -1$

Ekkor $\rho \in L^1(-1,1)$

Spec. esetek: $\alpha = \beta = 0$ Legendre

$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ T_n

$\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$ U_n

④ Laguerre-polinomok

$(0,\infty)$-en $\rho(x) = e^{-x}$-re véve GS-eljárással (p_n) ONPR.

Áll. $p_n(x) = c_n \cdot e^x (x^n \cdot e^{-x})^{(n)}$ $\quad c_n \in \mathbb{R}$

B: Ez valóban polinom. Elég megmutatni, hogy

$$\int_0^\infty e^x (x^n \cdot e^{-x})^{(n)} \cdot x^k \cdot e^{-x}\, dx = 0, \quad \text{ha } k < n.$$

parc. int.

$$= \underbrace{\left[(x^n \cdot e^{-x})^{(n-1)} \cdot x^k\right]_0^\infty}_{0} - k \cdot \int_0^\infty (x^n \cdot e^{-x})^{(n-1)} \cdot x^{k-1}\, dx = \dots = 0.$$

k db parc. int.

Áll. (p_n) teljes $L^2_\rho(0,\infty)$-ben.

B: $\underbrace{e^{r|x|}}_{e^{rx}} \cdot \underbrace{\rho(x)}_{e^{-x}} \in L^1$

$= e^{(r-1)x}$, $0 < r < 1$ választás jó.

Def. Klasszikus Laguerre-polinomok:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \cdot \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$$

Tulajdonságok:

1) $$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \cdot t^n$$ generátorfv.

2) Rekurzió: $(n+1) \cdot L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x)$

B: $\left(x f(x), g(x)\right)_\rho = \left(f(x), x g(x)\right)_\rho$ fennáll.

$x \cdot L_n(x)$ $n+1$-edfokú $\Rightarrow$ $x \cdot L_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k L_k(x)$

$\left(x L_n(x), L_k(x)\right)_\rho = \left(L_n(x), \underbrace{x L_k(x)}_{k+1 \text{ fokú}}\right)_\rho = 0$, ha $k < n-1$

$\Rightarrow$ $k \leq n-2$-re $a_k = 0$.

$\Rightarrow$ $x L_n(x) = \alpha \cdot L_{n+1}(x) + \beta \cdot L_n(x) + \gamma L_{n-1}(x)$

Lemma: $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \left(x^n \cdot e^{-x}\right)^{(n)}$-ben $b_0 = 1$, $b_1 = -n$,

$b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, ahol $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

B: a képletből adódik. $\square$

$x L_n(x)$ konstans tagja: $0 = \alpha + \beta + \gamma$

elsőfokú tagja: $1 = -\alpha(n+1) - \beta n - \gamma(n-1)$

$(n+1)$-edfokú tagja: $\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha$

$\Rightarrow$ $\alpha = -(n+1)$, $\beta = 2n+1$, $\gamma = -n$ $\square$

3) Differenciálegyenlet: $x y''(x) + (1-x) y'(x) + n \cdot y(x) = 0$

B: $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x}$

$x f'(x) = n \cdot x^n e^{-x} - x^{n+1} \cdot e^{-x} = (n-x) x^n e^{-x} = (n-x) \cdot f(x)$

$\Rightarrow$ $x \cdot f'(x) + (x-n) \cdot f(x) = 0$.

$(n+1)$-szeri deriválás és egyszerűsítés után azt kapjuk, ami + kell.

5 Hermite-polinomok

$I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$

GS-ortogonalizációval $1, x, \dots$ -ból $h_n(x)$ polinomrendszer.

Áll. $h_n(x) = c_n \cdot e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(n)}$

B: elég, hogy $\forall k < n$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(n)} \cdot x^k \cdot e^{-x^2}\, dx = \dots = 0.$ parc. int., k alk.

Áll. (h_n) teljes $L^2_\rho(\mathbb{R})$-en

B: Teljességi tétel $r = 1/2$-dal:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}|x|} \cdot e^{-x^2}\, dx}_{} < \infty$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} \dots}_{<\infty} + \int_{|x|\geq 1} \underbrace{e^{\frac{1}{2}|x| - x^2}}_{\text{Beszúrható}}\, dx < \infty$$

Def. $H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ klasszikus Hermite-p.

Tulajdonságok:

1) Generátorfv: $e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\, t^n$

2) Rekurzió: $H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$

3) Differenciálegyenlet: $y''(x) - 2x\, y'(x) + 2n\, y(x) = 0.$

Megj. Általánosított Laguerre-polinomok:

$$x^{-\alpha} e^{-x} (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)}$$

Haar-rendszer

$L^2(0,1)$-en, nincs súlyfv.

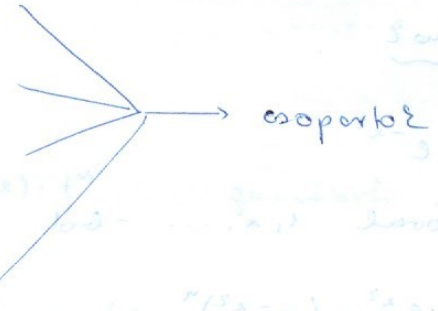
$\chi_0^{(0)}, \chi_0^{(1)},$

$\chi_1^{(1)}, \chi_1^{(2)},$

$\chi_2^{(1)}, \chi_2^{(2)}, \chi_2^{(3)}, \chi_2^{(4)},$

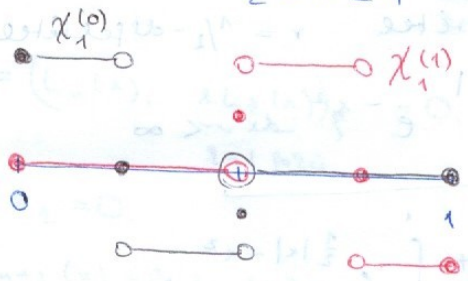
$\dots,$

$\chi_n^{(1)}, \dots, \chi_n^{(2^n)}$



$\chi_0^{(0)} = 1$ $[0,1]$-en, $\chi_0^{(1)} = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & x = 1/2 \\ -1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

Minden továbbira:



az abszt. érték $\sqrt{2^n}$

egyre tovább osztjuk az intervallumot, 0-ban és 1-ben folyt., sorrendben a szármt. rotáj