Algebrai topológia gyakorlat 2015/16 tavaszi félév

2020. augusztus 30.

1. Február 10.

1.1. feladat. *a*) $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1\right) = ?$

b) $\pi_1\left(S^3 \setminus S^1\right) = ?$ (a 4 dimenziós egységgömbből egy koordinátasík által kimetszett S^1-et hagyjuk el)

1.2. feladat. *a*) $\pi_1(X) = ?$, ahol $X = S^2 \cup D^2$

b) $\pi_1(Y) = ?$, ahol $Y = S^1 \bigcup\limits_{z \mapsto z^3} D^2$

c) Adjunk $X \to Y$ fedést!

1.3. feladat. $\left[S^2 \to S^1\right] = ?$ Általánosítás: mutassuk meg, hogy ha $E \xrightarrow{p} B$ fedés, $\pi_1(X) = 1$, és az E, B, X terek minden pontjának van egyszeresen összefüggő környezetekből álló környezetbázisa, akkor minden $f : X \to B$ leképezéshez létezik $\widetilde{f} : X \to E$ leképezés, hogy $f = p \circ \widetilde{f}$, azaz f felemelhető E-be.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1.4. feladat. $E \xrightarrow{p} B$ adott lokális homeomorfizmus, E és B kompakt Hausdorff-terek. Mutassuk meg, hogy p fedés.

1.5. feladat. *a*) Konstruáljunk a 8-asra ($S^1 \vee S^1$-re) egyszeresen összefüggő fedőteret!

b) Mi a fundamentális csoport?

2. Február 17.

2.1. feladat. Legyen Γ véges összefüggő gráf, v a gráf egyik csúcsa. Mi $\pi_1(\Gamma)$?

2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha G topologikus csoport, akkor $\pi_1(G)$ kommutatív.

2.3. feladat. $\pi_1\left(S^1 \vee S^2\right) = ?$ Mi az univerzális fedőtér?

2.4. feladat. Legyenek $X_1 \xrightarrow{p_1} Y$ és $X_2 \xrightarrow{p_2} Y$ fedések az X_1, X_2 összefüggő terekről Y-ra. Igaz-e, hogy

a) ha $X_1 \cong X_2$, akkor $p_1 \cong p_2$ (a fedések izomorfak), azaz $\exists f, g$, hogy a következő diagram kommutál;

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[ll, "g"] \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

b) ha $p_{1*}(\pi_1(X_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2))$, akkor $p_1 \cong p_2$?

2.5. feladat. Legyen $X \subset Y$, ahol Y T_4-tér, valamint X pontrahúzható és létezik olyan U környezete Y-ban, aminek a deformációs retraktuma. Mutassuk meg, hogy $Y \simeq {}^{Y}\!/_{X}$.

2.6. feladat. Legyen $m \geq 3$, $\varphi : \partial D^m \to X$. Bizonyítsuk be, hogy $\pi_1\left(D^m \bigcup_\varphi X\right) = \pi_1(X)$.

3. Február 24.

3.1. feladat. *a*) Legyen $E \xrightarrow{p} B$ univerzális fedés (E egyszeresen összefüggő tér, B összefüggő). Mutassuk meg, hogy ha X összefüggő és $X \xrightarrow{q} B$ fedés, akkor létezik olyan $E \xrightarrow{f} X$ fedés, amelyre a következő diagram kommutál.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

b) Mutassuk meg, hogy az univerzális fedés egyértelmű! (Azaz két univerzális fedőtér az *a*) feladatban megadott fedésekkel nem különböztethetők meg, tehát a köztük megadott fedőleképezések kommutálnak.)

3.2. feladat. Legyen $p, q > 1$. Bizonyítsuk (topologikus úton), hogy létezik $F_p \rightarrowtail F_q$ monomorfizmus.

3.3. feladat. Legyenek E, B, X összefüggő terek és legyen adott az $E \xrightarrow{p} B$ fedés. Mutassuk meg, hogy $f : X \to B$ függvény akkor és csak akkor emelhető fel E-be, azaz létezik olyan függvény, amely kommutatívvá teszi a diagramot, ha $\operatorname{im} f_* \subset \operatorname{im} p_*$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

3.4. feladat. Legyen adott egy $E \xrightarrow{p} B$ fedés. Azt mondjuk, hogy egy $f : E \to E$ leképezés *automorfizmusa* p-nek, ha $p \circ f = p$ és f homeomorfizmusa E-nek. Mutassuk meg, hogy ha f_1 és f_2 automorfizmusai p-nek és $f_1(e_0) = f_2(e_0)$, akkor $f_1 = f_2$.

3.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $|F_q : F_p| = n$ véges szám, akkor $q = np - n + 1$.

3.6. feladat. Határozzuk meg egy fedés automorfizmuscsoportját!

4. Március 2.

4.1. feladat. Legyen K csomó. Mutassuk meg, hogy

$$\pi_1\left(S^3 \setminus K\right) / \left[\pi_1\left(S^3 \setminus K\right), \pi_1\left(S^3 \setminus K\right)\right] = \mathbb{Z}.$$

4.2. feladat. Legyen $K \subset S^3$ csomó. Mutassuk meg, hogy létezik $\Sigma \subset S^3$ peremes beágyazott felület, amire $\partial\Sigma = K$. Bizonyítsuk ugyanezt peremes beágyazott irányított felületre is.

4.3. feladat. Legyenek $H \leq G$ végesen generált csoportok, $|G : H| < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy létezik E, B, p úgy, hogy $E \xrightarrow{p} B$ fedés, $\pi_1(B) \cong G$ és $\operatorname{im} p_* \cong H$.

5. Március 8.

5.1. feladat. Adjuk meg S^n-nek egy olyan CW-felbontását, melyben két-két $0, 1, \ldots, n$ dimenziós cella van.

5.2. feladat. Legyenek E és B CW-komplexusok és legyen adott az $E \xrightarrow{p} B$ n rétű fedés. Mi ekkor $\chi(E)$ és $\chi(B)$ között az összefüggés?

5.3. feladat. *a*) Létezik-e legalább 2 rétű $A_p \to A_q$ fedés?

b) Írjuk le az összes ilyen fedést!

c) Létezik-e nemtriviális $A_p \to A_p$ fedés?

5.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha G végesen prezentált csoport, akkor létezik X véges CW-komplexus, hogy $\pi_1(X) = G$.

5.5. feladat. (Bizonyítsuk be, hogy az összefüggő unió jóldefiniált művelet!) Bizonyítsuk be, hogy $T^2 \# RP^2 \cong A_3'$!

5.6. feladat. Mi a $\left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z^3 + az + b,\ z^3 + az + b\text{-nek nincs többszörös gyöke}\right\}$ felület?

6. Március 16.

6.1. feladat. Oldjuk meg az 5.3. feladatot nem irányítható felületekre is.

7. Március 30.

7.1. feladat. Legyen M^n nem irányítható háromszögelt n-sokaság. Mutassuk meg, hogy létezik egyértelmű $\widetilde{M} \to M$ kétrétű fedés, ahol $\widetilde{M}$ irányítható.

7.2. feladat. Legyen X cellakomplexus. Mutassuk meg, hogy X n rétű fedései egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak $\{\pi_1(X) \to \mathrm{Sym}(n)\}$-nel (izomorfia erejéig).

7.3. feladat. Az $f: X \to Y$ leképezést elágazó fedésnek nevezzük, ha lokálisan: fedés vagy homotóp $z \mapsto z^n$-nel. Mikor létezik $A_p \to A_q$ elágazó fedés?

7.4. feladat. Legyen a (G, e) tér topologikus csoport. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\widetilde{G}$ univerzális fedőtér is topologikus csoport.

8. Április 6.

8.1. feladat. Legyen v vektormező $D^2 \subset \mathbb{R}^2$-n egyelten nullhellyel. Igaz-e, hogy a $k\left(v|_{\partial D^2}\right) \in \mathbb{Z}$ körülfordulási szám független D^2 paraméterezésétől (azaz D^2 diffeomorfizmusaira nézve invariáns)?

8.2. feladat. Mennyi $k\left(v|_{\partial D^2_1}\right)$, ha

a) $v(x, y) = (x, y)$;

b) $v(x, y) = (x, -y)$?

8.3. feladat. Bakter és őrült masiniszta esete.

9. Április 13.

9.1. feladat. $f: M^m \to S^n$, $m < n \implies f$ nullhomotóp.

9.2. feladat. $f: S^2 \to \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ reguláris érték, $f^{-1}(y)$-nak k komponense van $\implies$ f-nek van legalább $(k+1)$ kritikus pontja.

10. Április 20.

10.1. feladat. Heegaard-diagramokhoz tartozó 3 dimenziós sokaságok megadása.

10.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy Heegaard-diagramok összefüggő uniója a megfelelő sokaságok összefüggő unióját adja.

10.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Heegaard-diagram stabilizációs lépése nem változtat a kódolt sokaságon.

10.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy mindegy, hogy egy beágyazott nadrág melyik két száránál ragasztunk.

10.5. feladat. Legyen adott egy vektormező a T^2 tóruszon. Tegyük fel, hogy a nullhelyek izoláltak; a hozzájuk tartozó körülfordulási számokat jelölje $n_1, \ldots, n_r$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{j=1}^{r} n_r = 0$. Bizonyítsuk be az állítás megfordítását is, azaz hogy ha az $n_1, \ldots, n_r$ egészek összege nulla, akkor van olyan vektormező T^2-n, aminek nullhelyeihez ezek mint körülfordulási számok tartoznak.

11. Április 27.

11.1. feladat. Igaz-e, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall p, q > 0$ $\exists f : A_p \to A_q$ folytonos leképezés, hogy $\deg f = n$?

11.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha v vektormező A_p-n, akkor $\sum_{v(P)=0} \operatorname{ind}_P v = 2 - 2p$. (Következmény: ha egy zárt felület megfésülhető, akkor az a tórusz.)

12. Május 4. (ZH)

12.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : M^n \to N^n$ és $g : N^n \to P^n$ sima leképezésekre irányított sokaságok között $\deg g \circ f = \deg f \cdot \deg g$!

12.2. feladat. Legyen X egy zárt irányított felület, Y pedig egy nem zárt irányított felület. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : X \to Y$ leképezésre $\deg f = 0$!

12.3. feladat. *a*) Számítsuk ki a $\pi_1(\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2, zw \neq 0\})$ csoportot!

b*) Számítsuk ki a $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{(z, w) : zw = 1\})$ csoportot! *Útmutatás:* gondoljunk csomókra.

12.4. feladat. Van-e az S^2 gömbön (folytonos) érintő egyenesmező?

12.5. feladat. Legyen $T = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$ egy tömör 3-dimenziós tégla, és legyen $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ ennek egy felbontása diszjunkt belsejű résztéglákra. Mit mondhatunk a $\pi_1(T \setminus (\operatorname{int} T_1 \cup \cdots \cup \operatorname{int} T_n))$ csoportról?

12.6. feladat. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Wirtinger-prezentáció analogonját többkomponensű linkekre!

12.7. feladat. Mely egész számok állnak elő összefüggő kompakt Lie-csoport Euler-karakterisztikájaként?