

# Algebrai topológia gyakorlat 2015/16 tavaszi félév

2020. augusztus 30.

## 1. Február 10.

1.1. feladat. a)  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1) = ?$

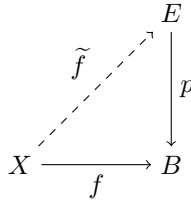
b)  $\pi_1(S^3 \setminus S^1) = ?$  (a 4 dimenziós egységömbből egy koordinátasík által kimetszett  $S^1$ -et hagyjuk el)

1.2. feladat. a)  $\pi_1(X) = ?$ , ahol  $X = S^2 \cup D^2$

b)  $\pi_1(Y) = ?$ , ahol  $Y = S^1 \bigcup_{z \mapsto z^3} D^2$

c) Adjunk  $X \rightarrow Y$  fedést!

1.3. feladat.  $[S^2 \rightarrow S^1] = ?$  Általánosítás: mutassuk meg, hogy ha  $E \xrightarrow{p} B$  fedés,  $\pi_1(X) = 1$ , és az  $E, B, X$  terek minden pontjának van egyszeresen összefüggő környezetekből álló környezetbázisa, akkor minden  $f : X \rightarrow B$  leképezéshez létezik  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  leképezés, hogy  $f = p \circ \tilde{f}$ , azaz  $f$  felemelhető  $E$ -be.



1.4. feladat.  $E \xrightarrow{p} B$  adott lokális homeomorfizmus,  $E$  és  $B$  kompakt Hausdorff-terek. Mutassuk meg, hogy  $p$  fedés.

1.5. feladat. a) Konstruáljunk a 8-asra ( $S^1 \vee S^1$ -re) egyszeresen összefüggő fedőteret!

b) Mi a fundamentális csoport?

## 2. Február 17.

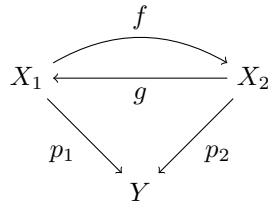
2.1. feladat. Legyen  $\Gamma$  véges összefüggő gráf,  $v$  a gráf egyik csúcsa. Mi  $\pi_1(\Gamma)$ ?

2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  topologikus csoport, akkor  $\pi_1(G)$  kommutatív.

2.3. feladat.  $\pi_1(S^1 \vee S^2) = ?$  Mi az univerzális fedőtér?

**2.4. feladat.** Legyenek  $X_1 \xrightarrow{p_1} Y$  és  $X_2 \xrightarrow{p_2} Y$  fedések az  $X_1, X_2$  összefüggő terekről  $Y$ -ra. Igaz-e, hogy

a) ha  $X_1 \cong X_2$ , akkor  $p_1 \cong p_2$  (a fedések izomorfak), azaz  $\exists f, g$ , hogy a következő diagram kommutál;



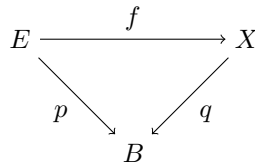
b) ha  $p_{1*}(\pi_1(X_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2))$ , akkor  $p_1 \cong p_2$ ?

**2.5. feladat.** Legyen  $X \subset Y$ , ahol  $Y$   $T_4$ -tér, valamint  $X$  pontrahúzható és létezik olyan  $U$  környezete  $Y$ -ban, aminek a deformációs retraktuma. Mutassuk meg, hogy  $Y \simeq Y/X$ .

**2.6. feladat.** Legyen  $m \geq 3$ ,  $\varphi : \partial D^m \rightarrow X$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\pi_1(D^m \cup_{\varphi} X) = \pi_1(X)$ .

### 3. Február 24.

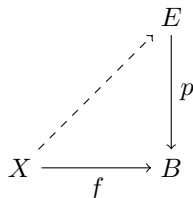
**3.1. feladat.** a) Legyen  $E \xrightarrow{p} B$  univerzális fedés ( $E$  egyszeresen összefüggő tér,  $B$  összefüggő). Mutassuk meg, hogy ha  $X$  összefüggő és  $X \xrightarrow{q} B$  fedés, akkor létezik olyan  $E \xrightarrow{f} X$  fedés, amelyre a következő diagram kommutál.



b) Mutassuk meg, hogy az univerzális fedés egyértelmű! (Azaz két univerzális fedőtér az a) feladatban megadott fedésekkel nem különböztethetők meg, tehát a köztük megadott fedőleképezések kommutálnak.)

**3.2. feladat.** Legyen  $p, q > 1$ . Bizonyítsuk (topologikus úton), hogy létezik  $F_p \rightarrow F_q$  monomorfizmus.

**3.3. feladat.** Legyenek  $E, B, X$  összefüggő terek és legyen adott az  $E \xrightarrow{p} B$  fedés. Mutassuk meg, hogy  $f : X \rightarrow B$  függvény akkor és csak akkor emelhető fel  $E$ -be, azaz létezik olyan függvény, amely kommutatívvá teszi a diagramot, ha  $\text{im } f_* \subset \text{im } p_*$ .



**3.4. feladat.** Legyen adott egy  $E \xrightarrow{p} B$  fedés. Azt mondjuk, hogy egy  $f : E \rightarrow E$  leképezés *automorfizmusa*  $p$ -nek, ha  $p \circ f = p$  és  $f$  homeomorfizmusa  $E$ -nek. Mutassuk meg, hogy ha  $f_1$  és  $f_2$  automorfizmusai  $p$ -nek és  $f_1(e_0) = f_2(e_0)$ , akkor  $f_1 = f_2$ .

**3.5. feladat.** Mutassuk meg, hogy ha  $|F_q : F_p| = n$  véges szám, akkor  $q = np - n + 1$ .

**3.6. feladat.** Határozzuk meg egy fedés automorfizmuscsoportját!

## 4. Március 2.

**4.1. feladat.** Legyen  $K$  csomó. Mutassuk meg, hogy

$$\pi_1(S^3 \setminus K) / [\pi_1(S^3 \setminus K), \pi_1(S^3 \setminus K)] = \mathbb{Z}.$$

**4.2. feladat.** Legyen  $K \subset S^3$  csomó. Mutassuk meg, hogy létezik  $\Sigma \subset S^3$  peremes beágyazott felület, amire  $\partial\Sigma = K$ . Bizonyítsuk ugyanezt peremes beágyazott irányított felületre is.

**4.3. feladat.** Legyenek  $H \leq G$  végesen generált csoportok,  $|G : H| < \infty$ . Bizonyítsuk be, hogy létezik  $E, B, p$  úgy, hogy  $E \xrightarrow{p} B$  fedés,  $\pi_1(B) \cong G$  és  $\text{im } p_* \cong H$ .

## 5. Március 8.

**5.1. feladat.** Adjuk meg  $S^n$ -nek egy olyan CW-felbontását, melyben két-két  $0, 1, \dots, n$  dimenziós cella van.

**5.2. feladat.** Legyenek  $E$  és  $B$  CW-komplexusok és legyen adott az  $E \xrightarrow{p} B$   $n$  rétű fedés. Mi ekkor  $\chi(E)$  és  $\chi(B)$  között az összefüggés?

**5.3. feladat.** a) Létezik-e legalább 2 rétű  $A_p \rightarrow A_q$  fedés?

b) Írjuk le az összes ilyen fedést!

c) Létezik-e nemtriviális  $A_p \rightarrow A_p$  fedés?

**5.4. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  végesen prezentált csoport, akkor létezik  $X$  véges CW-komplexus, hogy  $\pi_1(X) = G$ .

**5.5. feladat.** (Bizonyítsuk be, hogy az összefüggő unió jóldefiniált művelet!) Bizonyítsuk be, hogy  $T^2 \# RP^2 \cong A_3!$

**5.6. feladat.** Mi a  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z^3 + az + b, z^3 + az + b \text{-nek nincs többszörös gyöke}\}$  felület?

## 6. Március 16.

**6.1. feladat.** Oldjuk meg az 5.3. feladatot nem irányítható felületekre is.

## 7. Március 30.

**7.1. feladat.** Legyen  $M^n$  nem irányítható háromszögelt  $n$ -sokaság. Mutassuk meg, hogy létezik egyértelmű  $\widetilde{M} \rightarrow M$  kétrétű fedés, ahol  $\widetilde{M}$  irányítható.

**7.2. feladat.** Legyen  $X$  cellakomplexus. Mutassuk meg, hogy  $X$   $n$  rétű fedései egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak  $\{\pi_1(X) \rightarrow \text{Sym}(n)\}$ -nel (izomorfia erejéig).

**7.3. feladat.** Az  $f : X \rightarrow Y$  leképezést elágazó fedésnek nevezzük, ha lokálisan: fedés vagy homotóp  $z \mapsto z^n$ -nel. Mikor létezik  $A_p \rightarrow A_q$  elágazó fedés?

**7.4. feladat.** Legyen a  $(G, e)$  tér topologikus csoport. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a  $\widetilde{G}$  univerzális fedőtér is topologikus csoport.

## 8. Április 6.

**8.1. feladat.** Legyen  $v$  vektormező  $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ -n egyetlen nullhellyel. Igaz-e, hogy a  $k(v|_{\partial D^2}) \in \mathbb{Z}$  körülfordulási szám független  $D^2$  paraméterezésétől (azaz  $D^2$  diffeomorfizmusaira nézve invariáns)?

**8.2. feladat.** Mennyi  $k(v|_{\partial D_1^2})$ , ha

a)  $v(x, y) = (x, y)$ ;

b)  $v(x, y) = (x, -y)$ ?

**8.3. feladat.** Bakter és örült masiniszta esete.

## 9. Április 13.

**9.1. feladat.**  $f : M^m \rightarrow S^n$ ,  $m < n \implies f$  nullhomotóp.

**9.2. feladat.**  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  reguláris érték,  $f^{-1}(y)$ -nak  $k$  komponense van  $\implies f$ -nek van legalább  $(k+1)$  kritikus pontja.

## 10. Április 20.

**10.1. feladat.** Heegaard-diagramokhoz tartozó 3 dimenziós sokaságok megadása.

**10.2. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy Heegaard-diagramok összefüggő uniója a megfelelő sokaságok összefüggő unióját adja.

**10.3. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy a Heegaard-diagram stabilizációs lépése nem változtat a kódolt sokaságon.

**10.4. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy mindegy, hogy egy beágyazott nadrág melyik két száránál ragasztunk.

**10.5. feladat.** Legyen adott egy vektormező a  $T^2$  tóruszon. Tegyük fel, hogy a nullhelyek izoláltak; a hozzájuk tartozó körülfordulási számokat jelölje  $n_1, \dots, n_r$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\sum_{j=1}^r n_j = 0$ . Bizonyítsuk be az állítás megfordítását is, azaz hogy ha az  $n_1, \dots, n_r$  egészek összege nulla, akkor van olyan vektormező  $T^2$ -n, aminek nullhelyeihez ezek mint körülfordulási számok tartoznak.

## 11. Április 27.

**11.1. feladat.** Igaz-e, hogy  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall p, q > 0 \exists f : A_p \rightarrow A_q$  folytonos leképezés, hogy  $\deg f = n$ ?

**11.2. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $v$  vektormező  $A_p$ -n, akkor  $\sum_{v(P)=0} \text{ind}_P v = 2 - 2p$ .  
(Következmény: ha egy zárt felület megfésülhető, akkor az a tórusz.)

## 12. Május 4. (ZH)

**12.1. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy bármely  $f : M^n \rightarrow N^n$  és  $g : N^n \rightarrow P^n$  sima leképezésekre irányított sokaságok között  $\deg g \circ f = \deg f \cdot \deg g$ !

**12.2. feladat.** Legyen  $X$  egy zárt irányított felület,  $Y$  pedig egy nem zárt irányított felület. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $f : X \rightarrow Y$  leképezésre  $\deg f = 0$ !

**12.3. feladat.** a) Számítsuk ki a  $\pi_1(\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2, zw \neq 0\})$  csoportot!

b\*) Számítsuk ki a  $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{(z, w) : zw = 1\})$  csoportot! *Útmutatás:* gondoljunk csomókra.

**12.4. feladat.** Van-e az  $S^2$  gömbön (folytonos) érintő egyenesmező?

**12.5. feladat.** Legyen  $T = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$  egy tömör 3-dimenziós téglá, és legyen  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  ennek egy felbontása diszjunkt belsejű résztéglákra. Mit mondhatunk a  $\pi_1(T \setminus (\text{int } T_1 \cup \dots \cup \text{int } T_n))$  csoportról?

**12.6. feladat.** Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Wirtinger-prezentáció analogonját többkomponensű linkekre!

**12.7. feladat.** Mely egész számok állnak elő összefüggő kompakt Lie-csoport Euler-karakterisztikájaként?