2015. február 10.

Algebra2 intenzív

1. feladatsor

1. Határozzuk meg $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ és $\sqrt[3]{5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{-2}}$ összes valós értékét. ahol $\sqrt{2}$ és $\sqrt{-2}$ egyértelműnek tekintett

2. Legyen K végtelen test és $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Mit állíthatunk f-ről, ha $f(\alpha) = 0$

   (a) minden $\alpha \in K^n$ esetén?

   (b) minden olyan $\alpha \in K^n$ esetén, amelynek koordinátái páronként különbözők?

   (c) minden olyan $\alpha \in K^n$ esetén, amelynek koordinátái között van két azonos?

3. Mutassuk meg, hogy ha az $x_1, \ldots, x_n$ változók egy racionális együtthatós polinomja invariáns a változók minden páros permutációjára, akkor egyértelműen felírható az elemi szimmetrikus polinomoknak és a

$$\delta = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

   polinomnak olyan racionális együtthatós polinomjaként, amely δ-ban legfeljebb elsőfokú. Igaz-e az analóg állítás egész együtthatókkal?

4. Legfeljebb hány pont adható meg a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága páratlan egész legyen?

5. Legyenek $0 < k \leq n$ egészek. Legyen A az az $n \times n$-es mátrix $\mathbb{Z}$ felett, amelyben $a_{ij} = 1$, ha $i - j$ kongruens $1, 2, \ldots, k$ valamelyikével modulo n, más esetben pedig $a_{ij} = 0$. Milyen k és n esetén lesz $\det A = 0$?

6. Legyen K végtelen test. Tekintsünk K felett egy n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert, amely k egyenletből áll.

   (a) Mutassuk meg, hogy a megoldások száma nulla, egy vagy végtelen.

   (b) A három lehetőség közül melyek fordulhatnak elő? (A válasz n-től és k-tól függ.)

   (c) Mi a helyzet homogén egyenletrendszer esetén?

7. Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van?

Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2015. febr. 17.

1. Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.

2. Vektorteret alkotnak-e

   a) a páros fokú $K[x]$-beli polinomok és a nullpolinom a K test felett?

   b) a legfeljebb tizedfokú $K[x]$-beli polinomok és a nullpolinom a K test felett?

   c) azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(0) = 1$?

   d) azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(\sqrt[3]{2}) = 0$?

   e) azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek van valós gyöke?

   f) azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyek minden egész helyen egész értéket vesznek fel?

3. Vektortér-e a W halmaz az alábbi esetekben? A műveletek mindig a szokásosak.

   a) $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{C}$ felett.

   b) $W = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}$ felett.

   c) W az első és harmadik síknegyed uniója $\mathbb{R}$ felett.

   d) $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{F}_2$ test felett, ahol $0v = 0$ és $1v = v$.

4. Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?

5. Legyen W altere a K test feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$? Milyen K testre következik?

6. Ha egy V vektortér vektoraira a $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?

7. Legyenek $e_1, \ldots, e_n$ egy vektortér lineárisan független vektorai. Mikor lesznek lineárisan függetlenek az $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $\ldots$, $e_{n-1} + e_n$, $e_n + e_1$ vektorok?

8. Hány altere van az $\mathbb{F}_2$ test feletti 2, illetve 3 dimenziós vektortereknek?

9. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen K testek felett igaz még ez az állítás?

1. zh: március 24.
2. zh: május 12.

Algebra2 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2015. február 24.

1. Írjuk fel a sík alábbi lineáris transzformációinak mátrixát a szokásos bázisban is és az $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix oszlopai által alkotott bázisban is! A konvenció az legyen, hogy oszlopvektorokkal számolunk, ezeket a mátrixokkal balról szorozzuk.

   (a) Az origó körüli α szögű forgatás.

   (b) Az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözés.

   (c) Az $y = x$ egyenletű egyenesre való, függőleges irányú vetítés.

2. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a szokásos bázisban.

   (a) Az $a + bi$ komplex számmal való szorzás az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortéren.

   (b) A transzponálás a K test feletti $M_2(K)$ vektortéren.

   (c) A deriválás a K test feletti, legfeljebb n-edfokú, egyváltozós polinomok vektorterén.

3. (a) Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyek mátrixa alkalmas bázisban az egységmátrix?

   (b) Melyek azok a lineáris leképezések, amelyek mátrixa alkalmas bázispárban az egységmátrix?

4. Fedjük le az $\mathbb{F}_p$ feletti két-, illetve háromdimenziós vektorteret olyan valódi alterekkel, amelyek páronként diszjunktak (a nullvektortól eltekintve). Legalább hány altérre van szükség?

5. Legfeljebb hány vektort lehet megadni $\mathbb{R}^n$-ben úgy, hogy közülük bármelyik n vektor bázist alkosson?

6. Igazoljuk, hogy a sík egy A lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens (azaz $A^2 = A$), ha A nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

7. Egy A lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan k pozitív egész, hogy $A^k = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor $A + B$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

8. Legyen M nilpotens $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

9. Legyen V a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekre, és $r \in \mathbb{R}$ esetén $D_r \in \mathrm{Hom}(V, V)$ az a transzformáció, amelyre

$$D_r(f)(x) = f(x + r) - f(x).$$

   Igazoljuk, hogy $D_r D_s = D_s D_r$. Mutassuk meg továbbá, hogy egy n-edfokú polinom sosem állítható elő n darab periodikus függvény összegeként.

   ZH: március 24. és május 12.

Algebra2 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2015. március 3.

1. Legyen adott az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa a V-beli E és W-beli F bázisra nézve. Legyen S a V-beli E és E' bázisok közötti áttérés mátrixa, T pedig a W-beli F és F' bázisok közötti áttérés mátrixa. Mi lesz $\mathcal{A}$ mátrixa az E' és F' bázisokra nézve?

2. Test feletti mátrix rangja akkor és csak akkor 1, ha a mátrix egy nemnulla oszlopvektor és egy nemnulla sorvektor szorzata.

3. Ha A és B azonos méretű mátrixok egy test felett, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

   A rang szubadditív.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, valamint sajátértékeiket és sajátaltereiket $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

   Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

5. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk képterét, magterét, sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját.

   (a) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

   (b) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f \in K[x]$ 1 főegyütthatójú polinom előáll egy alkalmas (K feletti) vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polionomjaként.

7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek. I

   b) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak. H

   c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak. I

8. Minden komplex elemű négyzetes mátrix hasonló egy felső háromszögmátrixhoz.

9.* Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának 0 a nyoma. Az első hány hatványra kell csak feltenni?

10.* Bizonyítsuk be, hogy ha M egy komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához (elemenként), ha M minden sajátértékének az abszolútértéke 1-nél kisebb.

HF maradt: 3/6., 3/8. (2015. 03. 03.)

Algebra2 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2015. március 10.

1. Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van.

2. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ B-invariáns altér.

3. Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti n-dimenziós vektortér, A pedig egy lineáris transzformáció V-n. Bizonyítsuk be, hogy V-nek minden $0 \leq k \leq n$-re van k-dimenziós A-invariáns altere.

4. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

5. a) Igaz-e, hogy tetszőleges K test feletti 1 főegyütthatójú polinom előáll egy alkalmas K feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció minimálpolionomjaként? NEM.

   b) Igaz-e, hogy ha f egy k-adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor f egy alkalmas $n \times n$-es mátrix minimálpolinomja? NEM.

6. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?

7. Hány dimenziós alteret generálnak egy $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ transzformáció nemnegatív egész kitevőjű hatványai?

8. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.

9. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns altér.

10. Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ és $v \in V$. Jelölje továbbá $\varphi_{A,v}$ azt a minimális fokú, 1 főegyütthatójú polinomot, melyre $\varphi_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:

    a) A minimálpolinomja az összes $\varphi_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.

    b) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.

    c) $\dim(W) = \deg(\varphi_{A,v})$.

    d) Ha φ_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.

    e) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

    Határozzuk meg a $\varphi_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a legfeljebb n-edfokú polinomok vektorterén.

11. Igaz-e, hogy egy $n \times n$-es $\mathbb{C}$ feletti mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha sajátaltereinek összege az egész tér?

1. ZH: március 24.

4/7. b') λ^2 sajátértéke A^2-nak $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $+\lambda$ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak.

Algebra2 Intenzív verzió

1. zh

2015. március 24.

1. Írjuk fel az $n \times n$-es egységmátrixot UV alakú mátrixok összegeként, ahol U n-dimenziós oszlopvektor, V n-dimenziós sorvektor. Legalább hány tagú kell, hogy legyen az összeg?

2. Hány k dimenziós altere van a p elemű test feletti n dimenziós vektortérnek?

3. Határozzuk meg az $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátaltereit a komplex számok teste felett.

4. Az $\mathbb{R}^2$ síkon az origó körüli α szögű forgatásnak mi a minimálpolinomja? (A válasz α-tól függ.)

5. Legyen α olyan szög, amely nem egész számú többszöröse π-nek. Az $\mathbb{R}^3$ térben egy (origón átmenő) tengely körüli, α szögű forgatásnak mik az invariáns alterei?

6. Igazoljuk, hogy a a V vektortér egy A lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens (azaz $A^2 = A$), ha vannak olyan U és W alterek, amelyek összege az egész tér, és A-nak az U-ra való megszorítása az identitás, W-re való megszorítása pedig azonosan nulla.

7. Legyen A egy $\mathbb{C}$ felett lineáris transzformáció a $\mathbb{C}^n$ téren. Ha ezt a teret a kézenfekvő módon azonosítjuk az $\mathbb{R}^{2n}$ térrel, akkor A tekinthető $\mathbb{R}$ feletti lineáris transzformációnak is. Mutassuk meg, hogy ekkor a determinánsa nemnegatív.

Algebra 2, intenzív verzió

6. feladatsor

2015. március 31.

1. Kogrediensek-e $\mathbb{R}$ felett a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok?

2. Legyen B az a bilineáris függvény az $\mathbb{R}^2$ síkon, amelynek mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Szimmetrikus-e B ? Mi lesz B értéke az (x_1, y_1), (x_2, y_2) vektorpáron? Mi a B-hez tartozó kvadratikus alak? Legyen a egy valós szám. Mi lesz B mátrixa a

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}$$

mátrix oszlopai által alkotott bázisban?

3. Tekintsük a

$$Q(x, y, z) = -x^2 + 10xy - y^2 - z^2$$

valós kvadratikus alakot. Írjuk fel a neki megfelelő bilineáris függvény mátrixát. Írjuk fel Q-t lineárisan független homogén lineáris formák négyzetének lineáris kombinációjaként. Definit-e, szemidefinit-e Q ? $\to ax+by+cz$

4. Legyen B szimmetrikus bilineáris függvény egy valós vektortéren, Q a neki megfelelő kvadratikus alak, $e_1, \ldots, e_n$ egy B-ortogonális bázis, és

$$U = \langle e_i | Q(e_i) > 0 \rangle, \quad V = \langle e_i | Q(e_i) \geq 0 \rangle, \quad W = \langle e_i | Q(e_i) = 0 \rangle.$$

függ függ független

E három altér közül melyek nem függnek az $e_1, \ldots, e_n$ bázis megválasztásától?

5. Ha Q kvadratikus alak egy véges dimenziós valós vektortéren, és $x \neq 0$ esetén $Q(x) \neq 0$, akkor Q definit. Igaz-e ez $\mathbb{Q}$ felett is?

6. Két

(a) pozitív definit IGEN

(b) pozitív szemidefinit IGEN

(c) indefinit NEM

kvadratikus alak összege is az?

7. Előáll-e minden kvadratikus alak két pozitív szemidefinit kvadratikus alak különbségeként? IGEN

8. Határozzuk meg az $(1, 1, 1, 1)$ és $(1, 1, 1, -1)$ vektorok által bezárt szöget.

9. Meg lehet-e adni $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ pontokat
a) $\mathbb{R}^3$-ban; b) $\mathbb{R}^4$-ben
úgy, hogy $\forall i,j$: $P_i Q_j = 1$. legyen?

2015. 04. 14.

Algebra 2, intenzív

7. feladatsor

---

1) Hozzuk Jordan-féle normálalakra az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 8 & 11 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ mátrixot.

2) Mi A minimálpolinomja?

3) Adjunk meg olyan P invertálható mátrixot, amire $P^{-1}AP$ Jordan-mátrix lesz.

4) Számítsuk ki A^{2013}-t. (Általánosabban: A^k-t.)

5. Egy euklideszi tér tetszőleges A lineáris transzformációjára
   (a) $\mathrm{Ker}(A^*A) = \mathrm{Ker}(A)$,
   (b) $\mathrm{Im}(A^*A) = \mathrm{Im}(A^*)$,
   (c) A^*A önadjungált.

6. (a) Mutassuk meg, hogy két önadjungált mátrix összege is önadjungált.
   (b) Egy önadjungált mátrixnak egy skalárszorosa mikor önadjungált?
   (c) Két önadjungált mátrix szorzata mikor önadjungált?

7. Pozitív definit bi- vagy sesquilineáris függvény nem lehet elfajuló.

8. Mi az $f(x) = 1$ és $g(x) = x^2$ vektorok szöge a $C[-1, 1]$ térben?

9. Igazoljuk, hogy az $n \times n$-es (komplex) unitér mátrixok csoportot alkotnak a szorzásra nézve.

10. Egy 4-dimenziós kockát elmetszünk az egyik testátlója felezőmerőleges hipersíkjával. Mi lesz a (3-dimenziós) metszet?

2015. 04. 21.

Algebra 2, intenzív

8. feladatsor

---

1. Határozzuk meg a négyelemű részbenrendezett halmazokat.

2. Komplex euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor unitér, ha egy (minden) ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

3. Pozitív szemidefinit (önadjungált) mátrixok pozitív együtthatós lineáris kombinációja is az.

4. Minden A pozitív szemidefinit (önadjungált) mátrixhoz egyértelműen létezik olyan $\sqrt{A}$ pozitív szemidefinit (önadjungált) mátrix, hogy $\sqrt{A}^2 = A$.

5. Ha P pozitív szemidefinit (önadjungált) transzformáció egy véges dimenziós V euklideszi téren, és $x \in V$ olyan, hogy $(Px, x) = 0$, akkor $Px = 0$.

6. Véges dimenziós komplex euklideszi tér tetszőleges A lineáris transzformációjára
   (a) Van olyan P pozitív szemidefinit (önadjungált) és olyan U unitér transzformáció, amelyekkel $A = PU$.
   (b) P egyértelmű.
   (c) Ha A invertálható, akkor U is egyértelmű.

7. Egy V komplex euklideszi tér $v_1, \ldots, v_n$ vektorainak Gram-mátrixán a (v_i, v_j) skalárszorzatokból álló mátrixot értjük.

   (i) Igazoljuk, hogy a Gram-mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha a v_i vektorok lineárisan összefüggők.

   (ii) Igazoljuk, hogy $H \in M_n(\mathbb{C})$ akkor és csak akkor Gram-mátrix (alkalmas V felett), ha H pozitív szemidefinit (önadjungált) mátrix.

8. Két pozitív szemidefinit (önadjungált) $n \times n$-es mátrix elemenkénti szorzata is az?

9. Legyen $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $H = H^*$. Legyen $S = \{x \in \mathbb{C}^n : ||x|| = 1\}$.

   (i) H legnagyobb, illetve legkisebb sajátértéke

   $$\max_{x \in S}(Hx, x) \qquad \text{illetve} \qquad \min_{x \in S}(Hx, x).$$

   (ii) Ha H sajátértékei

   $$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

   és $(h_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ sajátértékei

   $$\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1},$$

   akkor

   $$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

10. Igazoljuk, hogy a $(\min(i, j))_{i,j=1}^n$ mátrix pozitív definit.

2015. április 28.

Algebra 2, intenzív

9. feladatsor

---

1. Legyen V tetszőleges (akár végtelen dimenziós) vektortér, és W egy altér. Mutassuk meg, hogy van olyan W' altér, hogy $V = W \oplus W'$.

2. (Főtengelytétel.) Véges dimenziós valós euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor önadjungált (másnéven: szimmetrikus), ha alkalmas ortonormált bázisban a mátrixa diagonális.

3. Véges dimenziós valós euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor ortogonális, ha egy (minden) ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

4. Véges dimenziós valós euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor ortogonális, ha alkalmas ortonormált bázisban a mátrixa

$$I \oplus (-I) \oplus \bigoplus_i \begin{pmatrix} c_i & -s_i \\ s_i & c_i \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $c_i^2 + s_i^2 = 1$ minden i-re.

Algebra 2, intenzív

2. zárthelyi

---

1. Adjuk meg azt a Jordan-mátrixot ($\mathbb{C}$ felett), amely hasonló a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz.

2. Kogrediensek-e $\mathbb{Q}$ felett az I és $5I$ mátrixok, ahol I a 2×2-es egységmátrix?

3. Alakítsuk teljes négyzetek lineáris kombinációjává a

$$-x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz$$

valós kvadratikus alakot, és határozzuk meg a jellegét. (A jelleg ötféle lehet: pozitív (szemi)definit, negatív (szemi)definit vagy indefinit.)

4. Vegyük azt a skalárszorzatot a legfeljebb n-edfokú komplex együtthatós polinomok vektorterén, amelyre 1, x, $x^2/2!$, $\ldots$, $x^n/n!$ ortonormált bázis. Mi lesz a

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad \text{és} \quad \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

($a_j, b_j \in \mathbb{C}$) polinomok skalárszorzata?

5. Legyen $\omega \in \mathbb{C}$ primitív n-edik egységgyök. Mely n-ekre lesz az

$$A = \left(\omega^{ij}/\sqrt{n}\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

mátrix

(a) önadjungált?

(b) unitér?

6. Mutassuk meg, hogy az 1 rangú pozitív szemidefinit mátrixok éppen a $(\bar{z}_i z_j)_{i,j=1}^n$ alakú mátrixok, ahol $0 \neq z = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

7. Legyen a V véges dimenziós, valós vagy komplex euklideszi tér az U és W alterek direkt összege. Legyen $P : V \to V$ a W-re való vetítés U mentén (azaz P lineáris, $Pu{=}0$ minden $u \in U$-ra és $Pw = w$ minden $w \in W$-re). Igazoljuk, hogy P akkor és csak akkor önadjungált, ha $U \perp W$.